Informatika za bibliotekare 1

beleške sa predavanja, 2. deo

Miloš Utvić

Sadržaj

Glava 1

Iskazni račun

1.1 Iskazi

Definicija 1.1. U matematičkoj logici se pod **iskazom** podrazumeva rečenica koja ima samo jednu istinitosnu vrednost, odnosno rečenica koja je ili tačna (istinita) ili netačna (lažna).

Primer 1.1. Razmotrimo sledeće rečenice:

(i) Dva i dva su četiri ($2 + 2 = 4$).

(ii) Dva i dva su tri ($2 + 2 = 3$).

(iii) Koliko je sati?

(iv) Danas je petak.

(v) $x = 5$.

Rečenice (i) i (ii) su primeri iskaza, pri čemu je prva tačan, a druga netačan iskaz.

Rečenica (iii) uopšte ne tvrdi nešto što bi moglo da bude tačno ili netačno, pa ne može biti iskaz.

Najzanimljiviji su slučajevi rečenica (iv) i (v). Istinitost rečenice (iv) zavisi od dana kada je rečenica saopštena. Ako je rečenica (iv) saopštena 28. oktobra 2016. godine po gregorijanskom kalendaru, u tom trenutku je ona istinita; međutim, ako se ista rečenica saopšti 29. oktobra 2016. godine po gregorijanskom kalendaru, onda je ona lažna. Očigledno je da njena istinitosna vrednost zavisi od toga šta se u datom trenutku podrazumeva pod rečju „Danas". Ukoliko se značenje reči „Danas" fiksira na tačno određeni datum po gregorijanskom (ili bilo kom drugom) kalendaru, (iv) predstavlja iskaz. Međutim, u opštem slučaju rečenica (iv) nije iskaz jer nema uvek istu istinitosnu vrednost, već je nekad tačna, a nekad ne.

Sličan zaključak može da se donese i u slučaju rečenice (v), tj. u opštem slučaju njena istinitosna vrednost zavisi od vrednosti promenljive x i rečenica (v) biće tačan iskaz samo kada x uzme vrednost 5. $\diamondsuit$

Pojedinačni iskazi se skraćeno označavaju pomoću **iskaznih slova**, tj. malih latiničnih slova engleske abecede: $p, q, r \ldots$

Definicija 1.2. Oznake mogućih istinitosnih vrednosti su $\top$ (istina, tačno) i $\perp$ (laž, netačno). Vrednosti $\top$ i $\perp$ tretiramo kao specijalne iskaze koje još nazivamo **iskaznim konstantama**: $\top$ kao iskaz koji je uvek tačan i $\perp$ kao iskaz koji je uvek netačan.

Definicija 1.3. Istinitosna vrednost iskaza p se označava sa $\tau(p)$. Zapis $\tau(p) = \top$ označava da je iskaz p tačan, dok zapis $\tau(p) = \perp$ označava da je iskaz p netačan.

Primer 1.2. Primetimo da se simboli $\top$ i $\perp$ sada koriste u dva značenja, što se najbolje vidi iz jednakosti 1.1.

$$\tau(\top) = \top,\ \tau(\perp) = \perp \tag{1.1}$$

U paru jednakosti (1.1) se simboli $\top$ i $\perp$ tretiraju u okviru zagrada kao iskazi (iskazne konstante), a sa desne strane znaka jednakosti kao istinitosne vrednosti. $\diamondsuit$

Primer 1.3. Razmotrimo sledeće iskaze:

p: Beograd je glavni grad Srbije 1.1.2015. godine po gregorijanskom kalendaru.

q: Buenos Aires je glavni grad Argentine 1.1.2015. godine po gregorijanskom kalendaru.

r: Sidnej je glavni grad Australije 1.1.2015. godine po gregorijanskom kalendaru.

Koristeći uvedene oznake možemo zapisati:

$$\tau(p) = \top,\ \ \tau(q) = \top,\ \ \tau(r) = \perp.$$

$\diamondsuit$

1.2 Složeni iskazi

Primenom operacija nad iskazima dobijaju se složeni iskazi. Razmotrićemo nekoliko najvažnijih operacija nad iskazima: negaciju, konjunkciju, disjunkciju, ekskluzivnu disjunkciju, implikaciju i ekvivalenciju.

Negacija iskaza

Negacija iskaza (u oznaci $\neg$) je unarna operacija, tj. preslikavanje koje iskaz p preslikava u iskaz $\neg p$. Negacija iskaza p, u oznaci $\neg p$, je tačan iskaz ako i samo ako je iskaz p netačan. Prema tome, iskaz $\neg p$ je netačan ako i samo ako je iskaz p tačan. Za iskaze p i $\neg p$ se još kaže da su **komplementarni** ili **suprotni** iskazi.

Primer 1.4. Ako je p oznaka za iskaz „Sidnej je glavni grad Australije 2015. godine po gregorijanskom kalendaru", tada je $\neg p$ oznaka za iskaz „Sidnej nije glavni grad Australije 2015. godine po gregorijanskom kalendaru". Iskaz p je netačan, a iskaz $\neg p$ je tačan. $\diamondsuit$

Konjunkcija iskaza

Definicija 1.4. Konjunkcija iskaza (u oznaci $\wedge$) je binarna operacija nad iskazima, tj. preslikavanje koje paru iskaza (p,q) pridružuje iskaz $p \wedge q$. Izraz $p \wedge q$ se čita „p i q". Konjunkcija iskaza p i q, u oznaci $p \wedge q$, je tačan iskaz ako i samo ako su oba iskaza p i q tačna. Prema tome, iskaz $p \wedge q$ je netačan ako i samo ako je bar jedan od iskaza p i q netačan.

Konjunkcija se koristi u matematici i programiranju kako bi se zadao složeni uslov koji je ispunjen jedino ako su ispunjeni svi uslovi od kojih se sastoji.

Primer 1.5. Da bi student položio ispit *Baze podataka* (u daljem tekstu: BP) mora da ispuni svaki od sledećih uslova:

- p: Student je položio praktični deo ispita BP (SQL) ako je osvojio bar 11 poena;
- q: Student je položio pismeni deo ispita BP ako je osvojio bar 15 poena;
- r: Ukupan broj poena koji je student osvojio na svim predispitnim i ispitnim obavezama u okviru BP je najmanje 51.

Prema tome iskaz „Student je položio ispit iz BP" može da se formuliše kao konjunkcija iskaza $p \wedge q \wedge r$. $\diamondsuit$

Disjunkcija iskaza

Definicija 1.5. Disjunkcija iskaza (u oznaci $\vee$) je binarna operacija nad iskazima, tj. preslikavanje koje paru iskaza (p,q) pridružuje iskaz $p \vee q$. Izraz $p \vee q$ se čita „p ili q”. Disjunkcija iskaza p i q, u oznaci $p \vee q$, je tačan iskaz ako i samo ako je bar jedan od iskaza p i q tačan. Prema tome, iskaz $p \vee q$ je netačan ako i samo ako su oba iskaza p i q netačna.

Operacija disjunkcije se još naziva **inkluzivnom disjunkcijom** pošto se u definiciji dozvoljava da je disjunkcija dva iskaza tačna i u slučaju kada su oba iskaza tačna.

Disjunkcija se koristi u matematici i programiranju kako bi se zadao složeni uslov koji je ispunjen jedino ako je ispunjen bar jedan od uslova koji ga sačinjavaju.

Primer 1.6. Godina je prestupna po gregorijanskom kalendaru ako je ispunjen barem jedan od sledećih uslova:

(a) Ako poslednje dve cifre godine nisu nule, tj. ako godina nije deljiva brojem 100, a jeste deljiva brojem 4, onda je ona prestupna. Tako su 1996, 2004, 2012, 2016. primeri prestupnih godina, dok 1997, 1999, 2001, 2015 to nisu.

(b) Ako poslednje dve cifre godine jesu nule, tj. ako je godina deljiva brojem 100, biće prestupna jedino ako je deljiva i sa 400. Odnosno, ako obrišemo dve poslednje nule i dobijeni broj je deljiv sa 4, godina će biti prestupna. Tako su 1700, 1800 i 1900. primeri godina koje nisu prestupne, dok 2000. godina jeste prestupna.

Ako definišemo iskaze:

p: Godina je deljiva sa 100;

q: Godina je deljiva sa 4;

r: Godina je deljiva sa 400.

tada se uslov (a) može formulisati kao složeni iskaz $\neg p \wedge q$, a uslov (b) kao iskaz r. Na osnovu toga se iskaz „Godina je prestupna” može predstaviti kao disjunkcija iskaza „Godina nije deljiva sa 100 i jeste deljiva sa 4” $(\neg p \wedge q)$ i iskaza „Godina je deljiva sa 400” (r), odnosno iskaz „Godina je prestupna” je iskaz $(\neg p \wedge q) \vee r$.

Primetimo da iskazi p i r ne mogu nezavisno jedan od drugog da uzimaju proizvoljne vrednosti. Naime, kada je tačan iskaz r, biće tačan i iskaz p jer je svaki broj deljiv sa 400 istovremeno deljiv i sa 100. Takođe, ako je iskaz p netačan, biće netačan i iskaz r, jer nijedan broj nedeljiv sa 100 nije deljiv ni sa 400. $\diamondsuit$

Ekskluzivna disjunkcija iskaza

Definicija 1.6. Ekskluzivna disjunkcija iskaza (u oznakama $\veebar$, $\oplus$) je binarna operacija nad iskazima, tj. preslikavanje koje paru iskaza (p,q) pridružuje iskaz $p \veebar q$. Izraz $p \veebar q$ se čita „ili p ili q". Ekskluzivna disjunkcija iskaza

p i q, u oznaci $p \veebar q$, je tačan iskaz ako i samo ako se iskazi p i q međusobno razlikuju po istinitosnoj vrednosti. Prema tome, iskaz $p \veebar q$ je netačan ako i samo ako iskazi p i q imaju istu istinitosnu vrednost, odnosno ako su ili oba tačna ili oba netačna iskaza.

Primer 1.7. Ako razmotrimo ponovo Primer 1.6, pošto godina ne može biti istovremena i deljiva sa 400 i nedeljiva sa 100, iskaz „Godina je prestupna" se može predstaviti kao ekskluzivna disjunkcija iskaza „Godina nije deljiva sa 100 i jeste deljiva sa 4" $(\neg p \wedge q)$ i iskaza „Godina je deljiva sa 400" (r), odnosno iskaz „Godina je prestupna" odgovara iskazu $(\neg p \wedge q) \veebar r$. Takođe, važi ista napomena o međusobnoj zavisnosti iskaza p i r u pogledu njihove istinitosne vrednosti. $\diamondsuit$

Implikacija iskaza

Definicija 1.7. Implikacija iskaza (u oznaci $\Rightarrow$) je binarna operacija nad iskazima, tj. preslikavanje koje paru iskaza (p,q) pridružuje iskaz $p \Rightarrow q$. Izraz $p \Rightarrow q$ se čita „ako p onda q" ili „iz p sledi q". Implikacija iskaza p i q, u oznaci $p \Rightarrow q$, je tačan iskaz ako i samo ako je iskaz p netačan ili ako je iskaz q tačan. Prema tome, iskaz $p \Rightarrow q$ je netačan ako i samo ako je istovremeno iskaz p tačan, a iskaz q netačan.

Primer 1.8. Napomena iz Primera 1.6 o zavisnosti između istinitosne vrednosti iskaza p i r se može izraziti implikacijom $r \Rightarrow p$, tj. „Ako je godina deljiva sa 400, onda je godina deljiva sa 100". Primetimo da je, zbog definicije implikacije, iskaz $r \Rightarrow p$ uvek tačan. Naime, ako je godina deljiva sa 400, biće deljiva i sa 100, pa će oba iskaza p i r biti tačna, a time i implikacija $r \Rightarrow p$. Ako godina nije deljiva sa 400, onda će iskaz r biti netačan, pa će po definiciji implikacija $r \Rightarrow p$ biti tačna. $\diamondsuit$

Ekvivalencija iskaza

Definicija 1.8. Ekvivalencija iskaza (u oznaci $\Leftrightarrow$) je binarna operacija nad iskazima, tj. preslikavanje koje paru iskaza (p,q) pridružuje iskaz $p \Leftrightarrow q$. Izraz $p \Leftrightarrow q$ se čita „p ekvivalentno q" ili „p ako i samo ako q". Iskaz $p \Leftrightarrow q$ je tačan ako i samo ako iskazi p i q imaju istu istinitosnu vrednost, odnosno ako su ili oba tačna ili oba netačna iskaza. Prema tome, iskaz $p \Leftrightarrow q$ je netačan ako i samo ako se iskazi p i q međusobno razlikuju po istinitosnoj vrednosti.

Definicija 1.9. Za dva iskaza kažemo da su **ekvivalentna** ako imaju istu istinitosnu vrednost.

Iz definicije 1.9 neposredno sledi da su iskazi p i q ekvivalentni ako i samo ako je iskaz $p \Leftrightarrow q$ tačan.

Primer 1.9. Primetimo da su ekvivalencija i ekskluzivna disjunkcija dva proizvoljna iskaza p i q uvek komplementarni iskazi. Naime, ako su p i q iste istinitosne vrednosti, $p \Leftrightarrow q$ je tačan, a $p \veebar q$ je netačan iskaz. Ako su pak p i q različite istinitosne vrednosti, $p \Leftrightarrow q$ je netačan, a $p \veebar q$ je tačan iskaz. Odatle odmah zaključujemo da su $(p \Leftrightarrow q)$ i $\neg(p \veebar q)$ ekvivalentni iskazi. Takođe, $\neg(p \Leftrightarrow q)$ i $(p \veebar q)$ su ekvivalentni iskazi. $\diamondsuit$

Primer 1.10. Iz definicija operacija sa iskazima se neposredno proverava da su sledeći iskazi tačni za proizvoljne iskaze p, q i r, odnosno da su odgovarajuće leve i desne strane sledećih iskaza ekvivalentni iskazi:

$\neg\neg p \Leftrightarrow p$ (dvostruka negacija)
$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ (komutativni zakon za konjunkciju)
$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (komutativni zakon za disjunkciju)
$(p \veebar q) \Leftrightarrow (q \veebar p)$ (komutativni zakon za ekskluzivnu disjunkciju)
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ (komutativni zakon za ekvivalenciju) $\diamondsuit$

Primer 1.11. U Primeru 1.10 nije navedena formula sa nazivom „komutativni zakon za implikaciju" jer takav zakon ne postoji (ne važi), odnosno u opštem slučaju iskazi $(p \Rightarrow q)$ i $(q \Rightarrow p)$ nisu ekvivalentni. Preciznije, ako iskazna slova p i q imaju različite vrednosti, tada će jedan od iskaza $(p \Rightarrow q)$ i $(q \Rightarrow p)$ biti tačan $(\bot \Rightarrow \top = \top)$, a jedan netačan $(\top \Rightarrow \bot = \bot)$ i u tom slučaju neće biti ekvivalentni. $\diamondsuit$

Primer 1.12. Iskazi iz Primera 1.6 i 1.7, $(\neg p \wedge q) \vee r$ i $(\neg p \wedge q) \veebar r$, su ekvivalentni ako se iskazi p, q i r definišu na sledeći način:

p: Godina je deljiva sa 100;

q: Godina je deljiva sa 4;

r: Godina je deljiva sa 400.

Štaviše, oba iskaza $(\neg p \wedge q) \vee r$ i $(\neg p \wedge q) \veebar r$ će u tom slučaju biti ekvivalentna iskazu „Godina je prestupna”.

Međutim, u opštem slučaju, ako su p, q i r proizvoljni iskazi, $(\neg p \wedge q) \vee r$ i $(\neg p \wedge q) \veebar r$, nisu ekvivalentni. Naime, ako je $\tau(p) = \perp$, $\tau(q) = \top$ i $\tau(r) = \top$, tada je $\tau((\neg p \wedge q) \vee r) = \top$, a $\tau((\neg p \wedge q) \veebar r) = \perp$ jer je $\tau(\neg p \wedge q) = \tau(r) = \top$.

Razlog za neekvivalentnost iskaza $(\neg p \wedge q) \vee r$ i $(\neg p \wedge q) \veebar r$ u opštem slučaju je posledica činjenice da u opštem slučaju $r \Rightarrow p$ ne mora biti tačan (v. Primer 1.8), a za vrednosti $\tau(p) = \perp$, $\tau(q) = \top$ i $\tau(r) = \top$ i nije.

Ako iskazu „Godina je prestupna” pridružimo „popravljene” iskaze $((\neg p \wedge q) \vee r) \wedge (r \Rightarrow p)$ i $((\neg p \wedge q) \veebar r) \wedge (r \Rightarrow p)$, tada se može pokazati da su ti iskazi ekvivalentni za sve istinitosne vrednosti iskaznih slova p, q i r (v. Primer 1.17). $\diamondsuit$

„Lenje izračunavanje” istinitosne vrednosti iskaza

U pojedinim slučajevima se istinitosna vrednost rezultata binarne operacije nad iskazima p i q može izračunati ako se poznaje samo istinitosna vrednost jednog od ta dva iskaza.

Konjunkcija. Ako je jedan od iskaza p i q netačan, vrednost drugog je nebitna, pošto će $p \wedge q$ svakako biti netačan iskaz: $p \wedge \perp = \perp \wedge q = \perp$.

Ako je pak jedan od iskaza p i q tačan, vrednost konjunkcije je jednaka vrednosti drugog iskaza: $p \wedge \top = p$, odnosno $\top \wedge q = q$.

Disjunkcija. Ako je jedan od iskaza p i q tačan, vrednost drugog je nebitna, pošto će $p \vee q$ svakako biti tačan iskaz: $p \vee \top = \top \vee q = \top$.

Ako je pak jedan od iskaza p i q netačan, vrednost disjunkcije je jednaka vrednosti drugog iskaza: $p \vee \perp = p$, odnosno $\perp \vee q = q$.

Ekskluzivna disjunkcija. Ako je jedan od iskaza p i q tačan, vrednost ekskluzivne disjunkcije je jednaka negaciji drugog iskaza: $p \veebar \top = \neg p$, odnosno $\top \veebar q = \neg q$.

Ako je pak jedan od iskaza p i q netačan, vrednost ekskluzivne disjunkcije je jednaka vrednosti drugog iskaza: $p \veebar \perp = p$, odnosno $\perp \veebar q = q$.

Implikacija. Ako je iskaz p tačan, vrednost iskaza $p \Rightarrow q$ je jednaka vrednosti iskaza q: $\top \Rightarrow q = q$.

Ako je iskaz p netačan, vrednost iskaza q je nebitna, pošto će $p \Rightarrow q$ svakako biti tačan iskaz: $\bot \Rightarrow q = \top$.

Ako je iskaz q tačan, vrednost iskaza p je nebitna, pošto će $p \Rightarrow q$ svakako biti tačan iskaz: $p \Rightarrow \top = \top$.

Ako je iskaz q netačan, vrednost iskaza $p \Rightarrow q$ je jednaka negaciji iskaza p: $p \Rightarrow \bot = \neg p$.

Ekvivalencija. Ako je jedan od iskaza p i q tačan, vrednost ekvivalencije je jednaka vrednosti drugog iskaza: $p \Leftrightarrow \top = p$, odnosno $\top \Leftrightarrow q = q$.

Ako je pak jedan od iskaza p i q netačan, vrednost ekvivalencije je jednaka vrednosti negaciji drugog iskaza: $p \Leftrightarrow \bot = \neg p$, odnosno $\bot \Leftrightarrow q = \neg q$.

1.3 Binarna Bulova algebra

Ideja iza binarne Bulove algebre je da se operacije sa iskazima i ispitivanje njihove istinitosti svedu na algebarski račun nalik uobičajenim računskim radnjama sa brojevima. U tom smislu je dovoljno posmatrati dve vrednosti, tačno (istina) i netačno (laž), i definisati operacije nad tim vrednostima koje odgovaraju operacijama nad iskazima.

Definicija 1.10. Binarna Bulova algebra je skup $\{\top, \bot\}$ na kome su definisane unarna operacija $\neg$ i binarne operacije $\wedge$, $\vee$, $\veebar$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ (Tabela 1.1):

	$\neg$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$\veebar$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Tabela 1.1: Definicija operacija nad binarnom Bulovom algebrom

Ovde treba primetiti da koristimo iste oznake za operacije pomoću kojih se konstruišu složeni iskazi (negacija, konjunkcija, disjunkcija, ekskluzivna disjunkcija, implikacija, ekvivalencija) kao i za operacije binarne Bulove algebre ($\neg, \wedge, \vee, \veebar, \Rightarrow, \Leftrightarrow$). Iz konteksta je jasno kada, na primer, $\wedge$ označava konjunkciju iskaza, a kada operaciju binarne Bulove algebre, te zato nećemo uvoditi posebne oznake da označimo ove dve različite operacije.

Prioritet operacija u binarnoj Bulovoj algebri

Primer 1.13. Redosled primene operacija binarne Bulove algebre utiče na rezultat izračunavanja pojedinih izraza. Naime, izraz $\bot \wedge \top \Rightarrow \bot$ može da se interpretira na dva načina:

(a) $(\bot \wedge \top) \Rightarrow \bot = \bot \Rightarrow \bot = \top$;

(b) $\bot \wedge (\top \Rightarrow \bot) = \bot \wedge \bot = \bot$. $\diamondsuit$

Primer 1.13 ilustruje potrebu da se uvede prioritet operacija kako bi se svaki izraz nad binarnom Bulovom algebrom interpretirao isključivo na jedan jedini način. Isto važi i za operacije nad iskazima. U praksi se koristi nekoliko definicija prioriteta logičkih operacija, pri čemu je glavna razlika u tome da li svaka operacija ima poseban prioritet ili se dozvoljava da pojedine operacije imaju isti prioritet. Za sve definicije je zajedničko da se zagradama zaobilazi prioritet i da se u slučaju istog prioriteta operacija izračunavanje vrši sleva nadesno. Ovde ćemo koristiti drugi pristup po kome prioritet opada na sledeći način:

1. $\neg$ ima najveći prioritet;
2. slede operacije $\wedge, \vee, \veebar$ koje imaju međusobno isti prioritet, ali niži u odnosu na $\neg$;
3. najmanji (međusobno isti) prioritet imaju operacije $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$.

Primer 1.14. Na osnovu definicije prioriteta iskaznih operacija izraz iz Primera 1.13 se interpretira na samo jedan način i to kao $\bot \wedge \top \Rightarrow \bot = (\bot \wedge \top) \Rightarrow \bot = \bot \Rightarrow \bot = \top$. $\diamondsuit$

„Lenje izračunavanje" u binarnoj Bulovoj algebri

Sva pravila koja smo naveli u pododeljku 1.2 odnose se i na binarnu Bulovu algebru. Ako je $x \in \{\top,\bot\}$, tada važi

$$\begin{array}{llll}
x \wedge \bot = \bot \wedge x = \bot & x \wedge \top = \top \wedge x = x & x \wedge x = x & x \wedge \neg x = \bot \\
x \vee \top = \top \vee x = \top & x \vee \bot = \bot \vee x = x & x \vee x = x & x \vee \neg x = \top \\
x \veebar \top = \top \veebar x = \neg x & x \veebar \bot = \bot \veebar x = x & x \veebar x = \bot & x \veebar \neg x = \top \\
x \Rightarrow \bot = \neg x & \bot \Rightarrow x = \top & x \Rightarrow x = \top & x \Rightarrow \neg x = \neg x \\
x \Rightarrow \top = \top & \top \Rightarrow x = x & & \neg x \Rightarrow x = x \\
x \Leftrightarrow \top = \top \Leftrightarrow x = x & x \Leftrightarrow \bot = \bot \Leftrightarrow x = \neg x & x \Leftrightarrow x = \top & x \Leftrightarrow \neg x = \bot
\end{array}$$

Algebarska notacija u binarnoj Bulovoj algebri

U računarstvu posebno mesto među iskaznim operacijama imaju negacija, konjunkcija i disjunkcija koje imaju posebne oznake, kao i iskazne konstante (Tabela 1.2). Ova notacija ističe mogućnost računanja sa istinitosnim vrednostima iskaza i odgovara notaciji koja se koristi u algebri za sabiranje i množenje, pa se još naziva algebarskom notacijom.

Iskazni račun	$\bot$	$\top$	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \veebar q$
Računarstvo	0	1	$\bar{p}$	$p \cdot q$ (ili samo pq)	$p + q$	$p \equiv q$	$p \oplus q$

Tabela 1.2: Oznake iskaznih konstanti i veznika u računarstvu (algebarska notacija)

„Lenje izračunavanje" (algebarska notacija)

Pravila lenjeg izračunavanja za konjunkciju, disjunkciju i ekskluzivnu disjunkciju u binarnoj Bulovoj algebri mogu da se zapišu i primenom oznaka koje se koriste u računarstvu, odnosno algebarskom notacijom. Ako je $x \in \{0,1\}$, tada važi

$$\begin{array}{cccc}
x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 & x \cdot 1 = 1 \cdot x = x & x \cdot x = x & x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = 0 \\
x + 1 = 1 + x = 1 & x + 0 = 0 + x = x & x + x = x & x + \bar{x} = \bar{x} + x = 1 \\
x \oplus 1 = 1 \oplus x = \bar{x} & x \oplus 0 = 0 \oplus x = x & x \oplus x = 0 & x \oplus \bar{x} = \bar{x} \oplus x = 1 \\
x \equiv 1 = 1 \equiv x = 1 & x \equiv 0 = 0 \equiv x = \bar{x} & x \equiv x = 1 & x \equiv \bar{x} = \bar{x} \equiv x = 0
\end{array}$$

Prioritet iskaznih operacija (algebarska notacija)

U računarstvu se prioritet iskaznih operacija definiše na različite načine, uključujući i definiciju datu u pododeljku Prioritet operacija u binarnoj Bulovoj algebri, str. 11. U slučaju algebarske notacije, pogodno je preciznije definisati prioritet operacija u binarnoj Bulovoj algebri kako bi se zapis pojednostavio izostavljanjem zagrada. U tom smislu, kada budemo koristili algebarsku notaciju podrazumevaćemo da prioritet opada na sledeći način:

1. $\neg$ ima najveći prioritet;

2. potom operacija $\cdot$ ima najveći prioritet;

3. $\oplus$ uobičajeno ima prioritet ne viši od $\cdot$ i ne niži od $+$ (u nekim programskim jezicima je između $\cdot$ i $+$);
4. $+$ ima niži prioritet u odnosu na $\cdot$;
5. implikacija i ekvivalencija ($\equiv$) se ne koriste direktno, ali svakako imaju najmanji prioritet.

1.4 Iskazne formule

Definicija 1.11. Skup iskaznih formula (u oznaci $\mathcal{F}$) se definiše na sledeći način:

(1) Iskazne konstante $\top$ i $\bot$ su iskazne formule, tj. $\top,\bot \in \mathcal{F}$.

(2) Iskazna slova p, q, $r\ldots$ su iskazne formule, tj. skup svih iskaznih slova $\{p,q,r,\ldots\} \subset \mathcal{F}$.

(3) Ako su F_1 i F_2 iskazne formule, tada su i iskazne formule i

(3a) $F_1 \wedge F_2$ (tj. $F_1 \wedge F_2 \in \mathcal{F}$),

(3b) $F_1 \vee F_2$ (tj. $F_1 \vee F_2 \in \mathcal{F}$),

(3c) $F_1 \veebar F_2$ (tj. $F_1 \veebar F_2 \in \mathcal{F}$),

(3d) $F_1 \Rightarrow F_2$ (tj. $F_1 \Rightarrow F_2 \in \mathcal{F}$),

(3e) $F_1 \Leftrightarrow F_2$ (tj. $F_1 \Leftrightarrow F_2 \in \mathcal{F}$).

(4) Ako je F iskazna formula, tada je i $\neg F$ iskazna formula (tj. $\neg F \in \mathcal{F}$).

(5) Ako je F iskazna formula, tada je i (F) iskazna formula (tj. $(F) \in \mathcal{F}$).

(6) Svaka iskazna formula se gradi konačnom primenom pravila (1)-(5), tj. ništa osim (1)-(5) nije iskazna formula.

Definicija 1.12. Drvo iskazne formule F se definiše u skladu sa definicijom iskazne formule:

(1) Ako je iskazna formula F iskazna konstanta ($\top$ ili $\bot$), tada se drvo iskazne formule F svodi na jedan čvor (koren drveta) označen tom formulom.

(2) Ako je iskazna formula F iskazno slovo (p, q, $r\ldots$), tada se drvo iskazne formule F svodi na jedan čvor (koren drveta) označen tom formulom.

(3) Ako je formula F nekog od oblika:

(3a) $F_1 \wedge F_2$,

(3b) $F_1 \vee F_2$,

(3c) $F_1 \veebar F_2$,

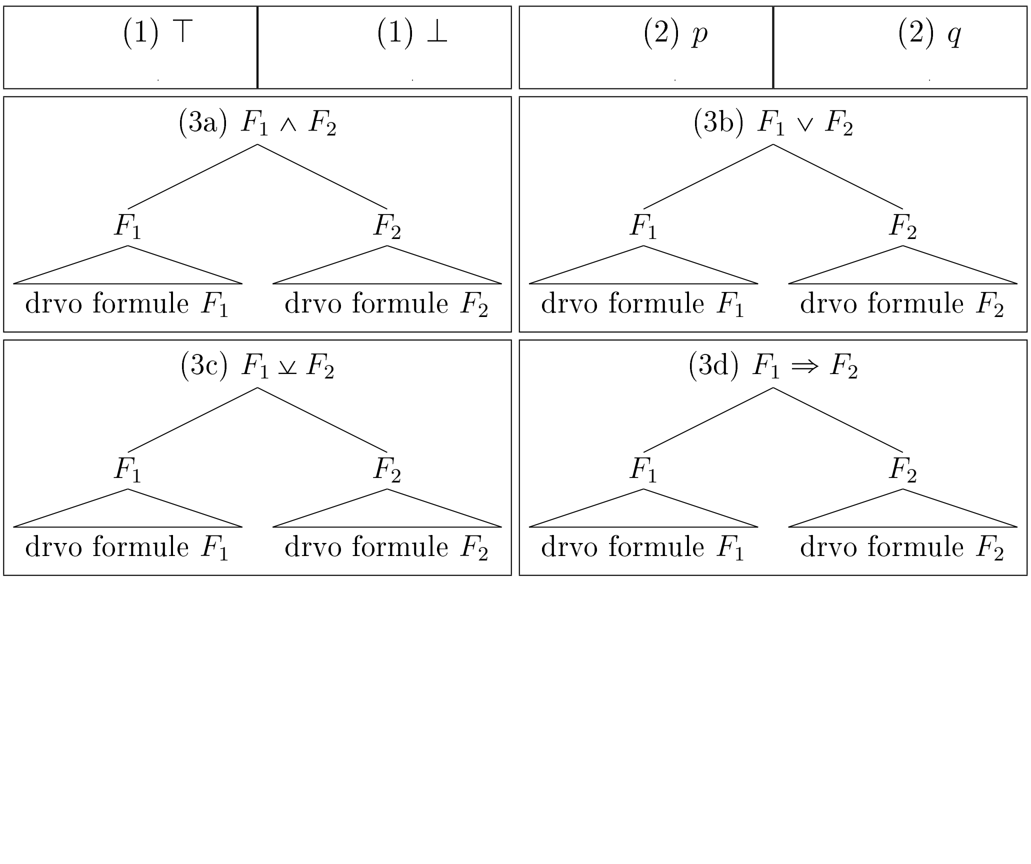
(3d) $F_1 \Rightarrow F_2$ ili

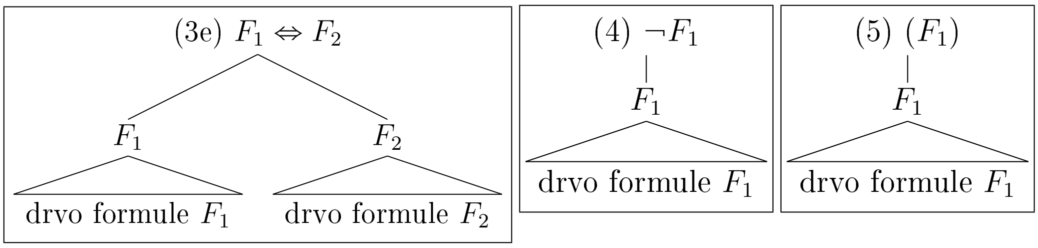
(3e) $F_1 \Leftrightarrow F_2$,

gde su F_1 i F_2 iskazne formule, tada se drvo iskazne formule F formira tako što koren drveta iskazne formule F_1 i koren drveta iskazne formule F_2 postaju redom levo i desno dete posebnog čvora označenog formulom F (taj čvor je koren drveta iskazne formule F).

(4) Ako je formula F oblika $\neg F_1$, gde je F_1 iskazna formula, tada se drvo iskazne formule F formira tako što koren drveta iskazne formule F_1 postaje dete posebnog čvora označenog formulom F (taj čvor je koren drveta iskazne formule F).

(5) Ako je formula F oblika (F_1), gde je F_1 iskazna formula, tada se drvo iskazne formule F formira tako što koren drveta iskazne formule F_1 postaje dete posebnog čvora označenog formulom F (taj čvor je koren drveta iskazne formule F).





Primer 1.15. Pokažimo da je $F = (\neg p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)$ iskazna formula.

Na osnovu definicije 1.11, pravilo (2), pošto su p, q i r iskazna slova, onda su p, q i r istovremeno i iskazne formule.

Prema definiciji 1.11, pravilo (4), pošto je p iskazna formula, onda je i $\neg p$ takođe iskazna formula.

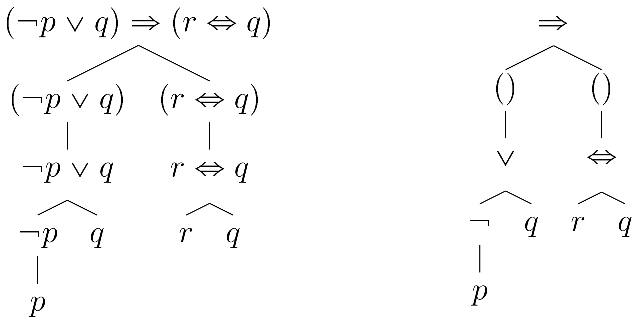
Na osnovu definicije 1.11, pravilo (3b), pošto su $\neg p$ i q iskazne formule, onda je i $\neg p \vee q$ takođe iskazna formula.

Prema definiciji 1.11, pravilo (3e), pošto su r i q iskazne formule, onda je i $r \Leftrightarrow q$ takođe iskazna formula.

Na osnovu definicije 1.11, pravilo (5), pošto su $\neg p \vee q$ i $r \Leftrightarrow q$ iskazne formule, onda su i $(\neg p \vee q)$ i $(r \Leftrightarrow q)$ takođe iskazne formule.

Prema definiciji 1.11, pravilo (3d), pošto su $(\neg p \vee q)$ i $(r \Leftrightarrow q)$ iskazne formule, onda je i $F = (\neg p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)$ takođe iskazna formula.

Navedena pravila opisuju i konstrukciju odgovarajućeg drveta iskazne formule F (Slika 1.1).



Slika 1.1: Drveta iskazne formule $F = (\neg p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)$ ilustruju njenu strukturu. Levo drvo prikazuje postepenu izgradnju formule F, počev od iskaznih slova p, q i r, sa svim formulama koje se kreiraju kao međurezultati. Desno drvo se fokusira na pravila (tačnije logičke veznike i zagrade) koja se koriste da se od iskaznih slova izgradi formula F.

$\diamondsuit$

Vrednost iskazne formule

Definicija 1.13. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih iskaznih slova, tj. $\mathcal{P} = \{p, q, r, \ldots\}$. Preslikavanje $\tau : \mathcal{P} \longrightarrow \{\top, \bot\}$ nazivamo **valuacijom binarne Bulove algebre** (u daljem tekstu: valuacija).

Valuacija je, dakle, preslikavanje koje svakom iskaznom slovu dodeljuje neku istinitosnu vrednost, tj. $\top$ ili $\bot$. Prema tome, valuaciju možemo poistovetiti sa istinitosnom vrednošću iskaznih slova, zato i koristimo istu oznaku $\tau(p)$ za valuaciju proizvoljnog iskaznog slova p i za istinitosnu vrednost iskaznog slova p (v. Definiciju 1.3).

Preslikavanje τ se može proširiti sa skupa iskaznih slova $\mathcal{P}$ na skup svih iskaznih formula $\mathcal{F}$.

Definicija 1.14. Istinitosna vrednost iskazne formule F se određuje na sledeći način:

(a) Ako je iskazna formula $F = \top$, tada je $\tau(F) = \top$.

(b) Ako je iskazna formula $F = \bot$, tada je $\tau(F) = \bot$.

(c) Ako je iskazna formula $F = p$ i p je iskazno slovo, tada je $\tau(F) = \tau(p)$.

(d) Ako je iskazna formula $F = F_1 \wedge F_2$, tada je $\tau(F) = \tau(F_1) \wedge \tau(F_2)$.

(e) Ako je iskazna formula $F = F_1 \vee F_2$, tada je $\tau(F) = \tau(F_1) \vee \tau(F_2)$.

(f) Ako je iskazna formula $F = F_1 \Rightarrow F_2$, tada je $\tau(F) = \tau(F_1) \Rightarrow \tau(F_2)$.

(g) Ako je iskazna formula $F = F_1 \Leftrightarrow F_2$, tada je $\tau(F) = \tau(F_1) \Leftrightarrow \tau(F_2)$.

(h) Ako je iskazna formula $F = \neg F$, tada je $\tau(F) = \neg\tau(F)$.

(i) Ako je iskazna formula $F = (G)$, tada je $\tau(F) = \tau(G)$.

Ovde ponovo treba napomenuti da se u Definiciji 1.14 simboli logičkih veznika $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\veebar$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ koriste u dva različita značenja:

(i) kao operacije između iskaza u zapisu iskazne formule, na primer $F = F_1 \wedge F_2$

(ii) i kao operacije Bulove algebre prilikom računanja istinitosne vrednosti, na primer u $\tau(F_1) \wedge \tau(F_2)$.

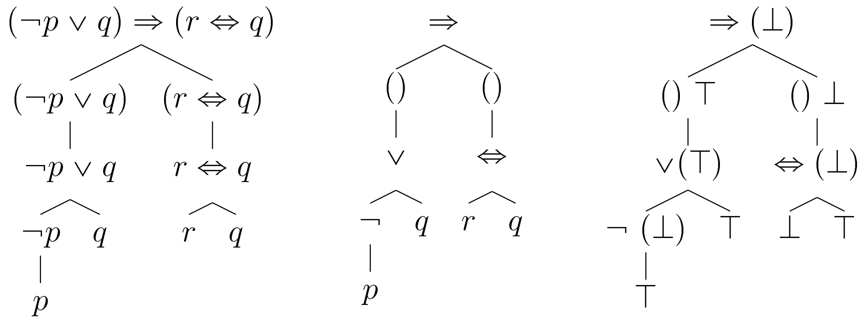
Pošto je iz konteksta jasno kada se koristi koje značenje, zadržaćemo iste oznake, a kada kontekst ne bude dovoljan za razumevanje značenja, naglasićemo o kom se značenju radi.

Može se pokazati da istinitosna vrednost iskazne formule zavisi isključivo od vrednosti iskaznih slova koja se pojavljuju u njenom zapisu.

Primer 1.16. Neka je data iskazna formula $F = (\neg p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)$. Odredimo njenu vrednost ako znamo da su vrednosti iskaznih slova p, q, r redom $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \top$, $\tau(r) = \bot$.

$$
\begin{aligned}
\tau(F) &= \tau((\neg p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)) = \\
&= \tau((\neg p \vee q)) \Rightarrow \tau((r \Leftrightarrow q)) = \\
&= \tau(\neg p \vee q) \Rightarrow \tau(r \Leftrightarrow q) = \\
&= (\tau(\neg p) \vee \tau(q)) \Rightarrow (\tau(r) \Leftrightarrow \tau(q)) = \\
&= (\neg\tau(p) \vee \tau(q)) \Rightarrow (\tau(r) \Leftrightarrow \tau(q)) = \\
&= (\neg\tau(\top) \vee \tau(\top)) \Rightarrow (\tau(\bot) \Leftrightarrow \tau(\top)) = \\
&= ((\neg\top) \vee \top) \Rightarrow (\bot \Leftrightarrow \top) = \\
&= (\bot \vee \top) \Rightarrow \bot = \\
&= \top \Rightarrow \bot = \bot.
\end{aligned}
$$

Računanje možemo predstaviti i koristeći drvo iskazne formule (Slika 1.2).



Slika 1.2: Izračunavanje vrednosti iskazne formule $F = (\neg p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)$ je ilustrovano drvetom. Levo i srednje drvo prikazuju strukturu formule F. Desno drvo se fokusira na konstante i operacije binarne Bulove algebre koje se koriste da se od vrednosti iskaznih slova izračuna vrednost formule F. Međurezultati računanja su dati desno od oznake primenjene operacije.

$\diamondsuit$

Istinitosne tablice

Vrednosti iskazne formule F za sve moguće vrednosti iskaznih slova koja se koriste u zapisu te formule predstavljaju se tablično radi bolje preglednosti, a odgovarajuća tabela sa rezultatima izračunavanja se naziva **istinitosna tablica** formule F.

Primer 1.17. Prikažimo istinitosnom tablicom vrednosti iskaznih formula $F_1 = ((\neg p \wedge q) \vee r) \wedge (r \Rightarrow p)$ i $F_2 = ((\neg p \wedge q) \veebar r) \wedge (r \Rightarrow p)$ iz Primera 1.12 za iskaz „Godina je prestupna" (Tabela 1.3).

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \vee r$	$(\neg p \wedge q) \veebar r$	$r \Rightarrow p$	F_1	F_2	$F_1 \Leftrightarrow F_2$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Tabela 1.3: Istinitosna tablica za formule F_1 i F_2

Iz istinitosne tablice 1.3 sledi da su iskazne formule F_1 i F_2 ekvivalentne.$\diamondsuit$

Tautologije i kontradikcije

Definicija 1.15. Ako je iskazna formula F uvek tačna za ma koje istinitosne vrednosti iskaznih slova koja se koriste u zapisu te formule, tada kažemo da je F **tautologija**.

Ako je iskazna formula F uvek netačna za proizvoljne istinitosne vrednosti svojih iskaznih slova, tada kažemo da je F **kontradikcija**.

Primer 1.18. Formula $F_1 \Leftrightarrow F_2$, odnosno $((\neg p \wedge q) \vee r) \wedge (r \Rightarrow p) \Leftrightarrow ((\neg p \wedge q) \veebar r) \wedge (r \Rightarrow p)$ iz Primera 1.17 je primer tautologije. $\diamondsuit$

Primer 1.19. Iz definicije odmah sledi da je formula F tautologija ako i samo ako je formula $\neg F$ kontradikcija, odnosno da je formula F kontradikcija ako i samo ako je formula $\neg F$ tautologija. $\diamondsuit$

Primer 1.20. Neke važnije tautologije su date u Tabeli 1.4. Većina njih se neposredno izvodi iz definicija operacija sa iskazima, odnosno iz tablica operacija binarne Bulove algebre (Tabela 1.1), poput dvostruke negacije i komutativnog zakona za konjunkciju i disjunkciju.

Negacija	
Dvostruka negacija	$p \Leftrightarrow \neg\neg p$
Konjunkcija i disjunkcija	
Zakon komutativnosti	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
Zakon asocijativnosti	$((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$
	$((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$
Distributivni zakoni	$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
	$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
De Morganovi zakoni	
Negacija konjunkcije	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
Negacija disjunkcije	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
Pravilo isključenja trećeg	
	$p \vee \neg p$
	$\neg(p \wedge \neg p)$
Ekskluzivna disjunkcija	
Ekvivalent ekskluzivne disjunkcije	$(p \veebar q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
Negacija ekskluzivne disjunkcije	$\neg(p \veebar q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
Implikacija	
Ekvivalent implikacije	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
Negacija implikacije	$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
Kontrapozicija	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
Ekvivalencija	
Ekvivalent ekvivalencije	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
Pravila izvođenja	
Modus ponens	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
Modus tollens	$(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$
Modus tollendo ponens	$((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$
Pojednostavljenje	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
Dodavanje	$p \Rightarrow (p \vee q)$
Spajanje	$p \wedge q \Rightarrow (p \wedge q)$

Tabela 1.4: Neke važne tautologije

Negacija	
Dvostruka negacija	$p \equiv \bar{\bar{p}}$
Konjunkcija i disjunkcija	
Zakon komutativnosti	$p \cdot q \equiv q \cdot p$
	$p + q \equiv q + p$
Zakon asocijativnosti	$(p + q) + r \equiv p + (q + r)$
	$(p \cdot q) \cdot r \equiv p \cdot (q \cdot r)$
Distributivni zakoni	$p \cdot (q + r) \equiv (p \cdot q) + (p \cdot r)$
	$p + (q \cdot r) \equiv (p + q) \cdot (p + r)$
De Morganovi zakoni	
Negacija konjunkcije	$\overline{p \cdot q} \equiv \bar{p} + \bar{q}$
Negacija disjunkcije	$\overline{p + q} \equiv \bar{p} \cdot \bar{q}$
Pravilo isključenja trećeg	
	$p + \bar{p} = 1$
	$\overline{p \cdot \bar{p}} = 1 \qquad p \cdot \bar{p} = 0$
Ekskluzivna disjunkcija	
Ekvivalent ekskluzivne disjunkcije	$p \bigoplus q \equiv p \cdot \bar{q} + \bar{p} \cdot q$
Negacija ekskluzivne disjunkcije	$\overline{p \bigoplus q} \equiv p \cdot q + \bar{p} \cdot \bar{q}$

Tabela 1.5: Neke važne tautologije (ekvivalencije u algebarskoj notaciji)

Pojedine tautologije u Tabeli 1.4 se mogu „pročitati" kao opisi slučajeva kada je neka od četire iskazne operacije tačna ili netačna.

Na primer, De Morganovim zakonima se opisuje kada su konjunkcija, odnosno disjunkcija, netačne. De Morganov zakon koji se odnosi na negaciju konjunkcije, $\neg(p \wedge q)$, opisuje na desnoj strani ekvivalencije kada je konjunkcija dva iskaza netačna: kada je bar jedan od njih netačan (prvi ili drugi ili oba, tj. $\neg p \vee \neg q$). De Morganov zakon koji se odnosi na negaciju disjunkcije, $\neg(p \vee q)$, opisuje kada je disjunkcija dva iskaza netačna: jedino u slučaju kada su oba iskaza netačna, tj. $\neg p \wedge \neg q$.

De Morganovi zakoni se neposredno izvode kada se primeti da se tablice konjunkcije i disjunkcije mogu transformisati jedna u drugu jednostavnom zamenom mesta simbola $\top$ i $\perp$, kao i simbola $\wedge$ i $\vee$.

Ekvivalent ekskluzivne disjunkcije i ekvivalent implikacije redom opisuju kada su odgovarajuće iskazne operacije tačne: ekskluzivna disjunkcija dva iskaza je tačna ako i samo ako je tačan samo jedan od njih, ili prvi ili drugi iskaz, tj. $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$; implikacija je tačna ako i samo ako je njena leva strana netačna ili ako je njena desna strana tačna, tj. $\neg p \vee q$.

Negacija ekskluzivne disjunkcije i negacija implikacije, kao što im imena govore, redom pokazuju kada su odgovarajuće iskazne operacije netačne: ekskluzivna disjunkcija dva iskaza je netačna kada su ti iskazi iste istinitosne vrednosti (oba tačna ili oba netačna), tj. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$; implikacija je netačna samo u slučaju kada je leva strana implikacije tačna i istovremeno desna strana implikacije netačna, tj. $p \wedge \neg q$. ♢

Tautologije su najvažnije iskazne formule jer su uvek tačne bez obzira na interpretaciju iskaznih slova. Direktna posledica tog svojstva je teorema 1.1.

Teorema 1.1. Neka je iskazna formula F tautologija u čijem se zapisu koriste isključivo iskazna slova p_1, p_2, ..., p_n. Ako u zapisu formule F zamenimo iskazna slova p_1, p_2, ..., p_n proizvoljnim iskaznim formulama F_1, F_2, ..., F_n, rezultat je ponovo iskazna formula i tautologija. □

Primer 1.21. Ako iskazna slova p, q i r u tautologijama Primera 1.20 (Tabela 1.4), zamenimo proizvoljnim formulama F, F_1 (umesto p), F_2 (umesto q), F_3 (umesto r), dobićemo tautologije navedene u Tabeli 1.6. ♢

Iskazne potformule. Supstitucija (zamena)

Definicija 1.16. Iskazne potformule formule F se definišu na sledeći način:

(i) Svaka formula F je sama sebi potformula.

(ii) Ako je formula F oblika (G) ili $\neg G$, tada je svaka potformula formule G takođe i potformula formule F.

(iii) Ako je formula F oblika $G \wedge H$ ili $G \vee H$ ili $G \veebar H$ ili $G \Rightarrow H$ ili $G \Leftrightarrow H$, tada je svaka potformula bilo formule G, bilo formule H, takođe i potformula formule F.

(iv) Potformule formule F su određene samo pravilima (i)–(iii), tj. ništa osim (i)–(iii) nije potformula iskazne formule F.

Primer 1.22. Uočimo formulu $F = (\neg p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)$. Na osnovu Definicije 1.16 sledi:

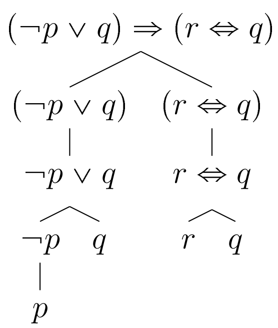
- $F = (\neg p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)$ je sama sebi potformula prema pravilu (i);
- pošto je F oblika $G_1 \Rightarrow H_1$, gde su $G_1 = (\neg p \vee q)$ i $H_1 = (r \Leftrightarrow q)$, na osnovu pravila (iii) se problem svodi na određivanje potformula od G_1 i H_1;

Negacija	
Dvostruka negacija	$F \Leftrightarrow \neg\neg F$
Konjunkcija i disjunkcija	
Zakon komutativnosti	$(F_1 \wedge F_2) \Leftrightarrow (F_2 \wedge F_1)$
	$(F_1 \vee F_2) \Leftrightarrow (F_2 \vee F_1)$
Zakon asocijativnosti	$((F_1 \vee F_2) \vee F_3) \Leftrightarrow (F_1 \vee (F_2 \vee F_3))$
	$((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \Leftrightarrow (F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3))$
Distributivni zakoni	$(F_1 \wedge (F_2 \vee F_3)) \Leftrightarrow ((F_1 \wedge F_2) \vee (F_1 \wedge F_3))$
	$(F_1 \vee (F_2 \wedge F_3)) \Leftrightarrow ((F_1 \vee F_2) \wedge (F_1 \vee F_3))$
De Morganovi zakoni	
Negacija konjunkcije	$\neg(F_1 \wedge F_2) \Leftrightarrow (\neg F_1 \vee \neg F_2)$
Negacija disjunkcije	$\neg(F_1 \vee F_2) \Leftrightarrow (\neg F_1 \wedge \neg F_2)$
Pravilo isključenja trećeg	
	$F \vee \neg F$
	$\neg(F \wedge \neg F)$
Ekskluzivna disjunkcija	
	$(F_1 \veebar F_2) \Leftrightarrow (F_1 \wedge \neg F_2) \vee (\neg F_1 \wedge F_2)$
	$\neg(F_1 \veebar F_2) \Leftrightarrow (F_1 \wedge F_2) \vee (\neg F_1 \wedge \neg F_2)$
Implikacija	
Ekvivalent implikacije	$(F_1 \Rightarrow F_2) \Leftrightarrow (\neg F_1 \vee F_2)$
Negacija implikacije	$\neg(F_1 \Rightarrow F_2) \Leftrightarrow (F_1 \wedge \neg F_2)$
Kontrapozicija	$(F_1 \Rightarrow F_2) \Leftrightarrow (\neg F_2 \Rightarrow \neg F_1)$
Ekvivalencija	
Ekvivalent ekvivalencije	$(F_1 \Leftrightarrow F_2) \Leftrightarrow ((F_1 \Rightarrow F_2) \wedge (F_2 \Rightarrow F_1))$
Pravila izvođenja	
Modus ponens	$(F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)) \Rightarrow F_2$
Modus tollens	$(\neg F_2 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)) \Rightarrow \neg F_1$
Modus tollendo ponens	$((F_1 \vee F_2) \wedge \neg F_1) \Rightarrow F_2$
Pojednostavljenje	$(F_1 \wedge F_2) \Rightarrow F_1$
Dodavanje	$F_1 \Rightarrow (F_1 \vee F_2)$
Spajanje	$F_1 \wedge F_2 \Rightarrow (F_1 \wedge F_2)$

Tabela 1.6: Neke važne tautologije sa proizvoljnim formulama umesto iskaznih slova

- prema pravilu (i) $G_1 = (\neg p \vee q)$ i $H_1 = (r \Leftrightarrow q)$ su potformule same sebi, pa su zato i potformule formule F;
- na osnovu pravila (ii), pošto važi $G_1 = (G_2)$ i $H_1 = (H_2)$, gde su $G_2 = \neg p \vee q$ i $H_2 = r \Leftrightarrow q$, sledi da su potformule od G_2 i H_2 takođe potformule od F;
- ako ponovo primenimo pravilo (i), dobijamo da su $G_2 = \neg p \vee q$ i $H_2 = r \Leftrightarrow q$ potformule od F pošto su same sebi potformule;
- s obzirom da je $G_2 = G_3 \vee H_3$, gde su $G_3 = \neg p$ i $H_3 = q$, a takođe i $H_2 = G_4 \Leftrightarrow H_4$, gde su $G_4 = r$ i $H_4 = q$, na osnovu pravila (iii) sledi da su potformule formula G_3, H_3, G_4 i H_4 takođe i potformule od F;
- primenom pravila (i) dobija se da su $G_3 = \neg p$, $H_3 = q$, $G_4 = r$ i $H_4 = q$ potformule od F pošto su same sebi potformule;
- pošto je $G_3 = \neg G_5$, gde je $G_5 = p$, na osnovu pravila (ii) sledi da su potformule od G_5 takođe i potformule od F;
- na kraju, s obzirom na pravilo (i), dobija se da je $G_5 = p$ sama sebi potformula, pa je na osnovu prethodnog i potformula od F;
- prema tome, formule $(\neg p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)$, $(\neg p \vee q)$, $(r \Leftrightarrow q)$, $\neg p \vee q$, $r \Leftrightarrow q$, $\neg p$, p, q, i r su sve potformule formule F.

Analiza koju smo upravo primenili odgovara konstrukciji drveta iskazne formule F, pri čemu su potformule zapravo pojedinačni čvorovi drveta (Slika 1.3).



Slika 1.3: Drvo iskazne formule $F = (\neg p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)$ ilustruje njenu strukturu i potformule formule F kao čvorove drveta.

U poređenju sa Primerom 1.15, gde smo analizirali strukturu iste formule, vidimo da je rezultat istovetno drvo (v. Sliku 1.1). Jedina razlika je u načinu konstrukcije drveta iskazne formule F:

- u Primeru 1.15 drvo je konstruisano polazeći od listova (iskaznih slova kao atomičnih formula) ka korenu drveta (formuli F) primenom pravila Definicije 1.11 (iskazne formule);
- u Primeru 1.22 drvo se konstruiše polazeći od korena (formule F kao sopstvene potformule) ka listovima drveta (iskaznim slovima kao atomičnim potformulama) primenom pravila Definicije 1.16 (iskazne potformule).

$\diamondsuit$

Teorema 1.2. Neka je F iskazna formula, A njena potformula i B iskazna formula koja je ekvivalentna formuli A (tj. $A \Leftrightarrow B$ je tautologija). Ako u zapisu formule F zamenimo şva pojavljivanja formule A formulom B, dobijena formula, oznaci $F[A \mapsto B]$ je ekvivalentna polaznoj formuli, tj. $F[A \mapsto B] \Leftrightarrow F$ je tautologija. $\square$

Primer 1.23. Pokažimo da je formula $F = (\neg p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)$ ekvivalentna formuli u čijem zapisu se ne koristi ni implikacija, ni ekvivalencija, ni ekskluzivna disjunkcija.

Na osnovu tautologije Ekvivalent ekvivalencije (Tabela 1.6) i Teoreme 1.1, formula

$$(r \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((r \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \tag{1.2}$$

je takođe tautologija. Na osnovu Teoreme 1.2, ako u zapisu formule F zamenimo levu stranu ekvivalencije 1.2 odgovarajućom desnom stranom, dobićemo formulu

$$(\neg p \vee q) \Rightarrow ((r \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \tag{1.3}$$

ekvivalentnu formuli F. Primetimo da se u zapisu formule 1.3 više ne pojavljuje ekvivalencija.

Da bismo se oslobodili implikacije, primenićemo sledeće:

- na osnovu tautologije Ekvivalent implikacije (Tabela 1.6) i Teoreme 1.1 sledi da su formule

$$(r \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg r \vee q) \tag{1.4}$$

$$(q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg q \vee r) \tag{1.5}$$

  tautologije;

- na osnovu Teoreme 1.2 sledi da se u formuli 1.3 mogu zameniti leve strane ekvivalencija 1.4 i 1.5 odgovarajućim desnim stranama, tako da se dobija formula

$$(\neg p \vee q) \Rightarrow ((\neg r \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \tag{1.6}$$

- na kraju ostaje da se oslobodimo poslednje implikacije. Primetimo najpre da na osnovu osnovu tautologije Ekvivalent implikacije (Tabela 1.6) i Teoreme 1.1 sledi da je formula

  $$((\neg p \vee q) \Rightarrow ((\neg r \vee q) \wedge (\neg q \vee r))) \Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee q) \vee ((\neg r \vee q) \wedge (\neg q \vee r))) \tag{1.7}$$

  takođe tautologija.

- primenom Teoreme 1.2 sledi da se u formuli 1.6 sme zameniti leva strana ekvivalencije 1.7 odgovarajućom desnom, pa je polazna formula F ekvivalentna formuli

  $$(\neg(\neg p \vee q) \vee ((\neg r \vee q) \wedge (\neg q \vee r))) \tag{1.8}$$

Primenom De Morganovog zakona, dvostruke negacije i Teorema 1.1 i 1.2 na sličan način se formula 1.8 može svesti na ekvivalentan oblik

$$((p \wedge \neg q) \vee ((\neg r \vee q) \wedge (\neg q \vee r)))$$

u kome nema ni implikacije, ni ekvivalencije, ni ekskluzivne disjunkcije, niti se negacija pojavljuje ispred zagrade. $\diamondsuit$

Normalne forme iskaznih formula

U dosadašnjim primerima su konstruisane istinitosne tablice za zadate iskazne formule. Može se postaviti i obrnuti problem: ako je data istinitosna tablica nepoznate formule, odrediti zapis nepoznate formule.

Odmah se nameću sledeća pitanja:

(i) Da li za zadatu istinitosnu tablicu uvek postoji bar jedna iskazna formula kojoj odgovara ta tablica?

(ii) Ako postoji bar jedna iskazna formula kojoj odgovara zadata istinitosna tablica, da li je ona jedinstvena (jednoznačno određena)?

(iii) Ako postoji više iskaznih formula kojima odgovara ista zadata tablica, može li se među svim tim rešenjima izabrati „najjednostavnije” po dužini zapisa i strukturi, sa najmanjim mogućim brojem iskaznih slova i veznika i tako dalje? I ako može, da li je ono jedinstveno ili ne?

Odgovor na prvo pitanje je potvrdan, a na drugo pitanje — odričan. Činjenica da postoje različite iskazne formule koje su međusobno ekvivalentne, tj. imaju identične istinitosne tablice, ukazuje na to da u opštem slučaju problem određivanja iskazne formule kojoj odgovara zadata istinitosna tablica nema jedinstveno rešenje. Štaviše, ako je formula F jedno rešenje koje odgovara zadatoj istinitosnoj tablici, odmah dobijamo da su i formule $\neg\neg F$, $F \wedge F$, $F \vee F$, $F \wedge \top$, $F \vee \bot$ takođe rešenja, što neposredno dovodi do zaključka da rešenja ima beskonačno mnogo (dovoljno je da svako od ovih pravila ponovo primenimo na svaku formulu prethodno izvedenu iz F tim istim pravilima u konačnom broju koraka).

Odgovor na treće pitanje je najteži i ponovo, zbog tautologija koje opisuju ekvivalentnost formula određene strukture (Tabela 1.4), rešenje nije jedinstveno, a potrebno je i precizno definisati šta se podrazumeva pod „najjednostavnijom" strukturom rešenja. Ovde ćemo razmotriti neka moguća rešenja koja nisu najjednostavnija po svojoj strukturi, ali su polazna tačka za dobijanje takvih rešenja. Radi jednostavnijeg opisa tih rešenja, uvešćemo nekoliko novih pojmova.

Definicija 1.17. Iskaznu formulu, koja se svodi na proizvoljno iskazno slovo ili negaciju proizvoljnog iskaznog slova, nazivaćemo **literalom**.

Primer 1.24. Iskazna slova p, q, r, kao i njihove negacije $\neg p$, $\neg q$, $\neg r$, predstavljaju primere literala. Iskazne formule $\neg\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $\neg p \wedge q$, $p \vee \neg q$, nisu primeri literala.

Ako koristimo algebarsku notaciju (v. odeljak 1.3, tada p, q, r, $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, predstavljaju primere literala, dok iskazne formule $\bar{\bar{p}}$, pq, $p+q$, $\bar{p}q$, $p+\bar{q}$ to nisu. $\diamondsuit$

Definicija 1.18. Iskazna formula koja se sastoji samo od jednog ili više literala povezanih veznikom za konjunkciju $(\wedge, \cdot)$ naziva se **elementarna konjunkcija**.

Iskazna formula koja se sastoji samo jednog ili više literala povezanih veznikom za disjunkciju $(\vee, +)$ naziva se **elementarna disjunkcija**.

Primer 1.25. Iskazne formule $p \wedge \neg q \wedge \neg r$, $\neg q \wedge \neg r$, p, q, r, $\neg p$, $\neg q$, $\neg r$ (odnosno, u algebarskoj notaciji: $p\bar{q}\bar{r}$, $\bar{q}\bar{r}$, p, q, r, $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$) su primeri elementarnih konjunkcija.

Iskazne formule $p \vee \neg q \vee \neg r$, $\neg q \vee \neg r$, p, q, r, $\neg p$, $\neg q$, $\neg r$ (odnosno, u algebarskoj notaciji: $p+\bar{q}+\bar{r}$, $\bar{q}+\bar{r}$, p, q, r, $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$) su primeri elementarnih disjunkcija. $\diamondsuit$

DNF — disjunktivna normalna forma

Definicija 1.19. Ako postoji iskazna formula G, sastavljena od jedne ili više elementarnih konjunkcija povezanih veznikom disjunkcije, koja je ekvivalentna zadatoj formuli F, onda se formula G naziva **disjunktivnom normalnom formom** (skr. **DNF**) formule F.

Primer 1.26. Na osnovu ekvivalenta ekskluzivne disjunkcije i negacije ekskluzivne disjunkcije (Tabela 1.6) neposredno sledi da je $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ DNF za formule $(p \veebar q)$ i $\neg(p \Leftrightarrow q)$, odnosno da je $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ DNF za formule $\neg(p \veebar q)$ i $p \Leftrightarrow q$.

Ako koristimo algebarsku notaciju, str. 12), $(p \cdot \bar{q}) + (\bar{p} \cdot q)$ je DNF za formule $p \oplus q$ i $\overline{p \equiv q}$, dok je formula $(p \cdot q) + (\bar{p} \cdot \bar{q})$ DNF za formule $\overline{p \oplus q}$ i $p \equiv q$. ♢

U praksi se koristi vrlo jednostavan postupak za određivanje DNF formule na osnovu njene istinitosne tablice o čemu govori Teorema 1.3.

Teorema 1.3 DNF. Neka je F iskazna formula različita od $\perp$ i neka je T njena istinitosna tablica. DNF formule F se konstruiše na sledeći način:

(i) Za svaki red tablice T, u kome formula F ima istinitosnu vrednost $\top$, pravimo po jednu formulu (u daljem tekstu teoreme: formula reda tablice). Formula reda tablice se sastoji od literala povezanih konjunkcijom ($\wedge$). Literali se formiraju od svih različitih iskaznih slova formule, pri čemu iskaznom slovu x odgovara literal x ako i samo ako u tom redu tablice x ima vrednost $\top$, odnosno iskaznom slovu x odgovara literal $\neg x$ ako i samo ako u tom redu tablice x ima vrednost $\perp$ (dakle, pišemo negaciju ispred onih iskaznih slova kojima u tom redu tablice odgovara vrednost $\perp$).

(ii) Ako formule prethodnog koraka stavimo u zagrade i međusobno ih povežemo disjunkcijom ($\vee$), dobijena formula predstavlja DNF formule F zadate istinitosnom tablicom T. □

Primer 1.27. Odredimo DNF za dve nepoznate formule, F_1 i F_2, ako je data njihova istinitosna tablica:

p	q	r	F_1	F_2
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$

Najpre uočimo redove istinitosne tablice u kojima je formula F_1 tačna (Tabela 1.7). Vrednosti iskaznih slova i formule u tim redovima su označeni crvenom bojom, a vrednost formule i fontom veće težine. Za svaki red u kome je F_1 tačna konstruišemo odgovarajuću formulu reda kao konjunkciju odgovarajućih literala (ako je u posmatranom redu iskazno slovo p tačno, koristimo literal p; ako je p netačno, koristimo literal $\neg p$ i na isti način za iskazna slova q i r).

Primetimo da je svaka formula reda tačna isključivo za one vrednosti iskaznih slova odgovarajućeg reda (na primer, formula 6. reda u tablici, $\neg p \wedge q \wedge \neg r$ je tačna isključivo u slučaju kada je istovremeno svaki literal u konjunkciji tačan, tj. ako je istovremeno $\tau(p) = \bot$, $\tau(q) = \top$ i $\tau(r) = \bot$, što su upravo vrednosti iskaznih slova u 6. redu tablice).

DNF formule F_1 se dobija kao disjunkcija konstruisanih formula (u zagradama) za pojedinačne redove.

p	q	r	F_1	formula reda tablice
$\top$	$\top$	$\top$	$\boldsymbol{\top}$	$p \wedge q \wedge r$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\boldsymbol{\top}$	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\boldsymbol{\top}$	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

DNF(F_1): $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

Tabela 1.7: DNF formule F_1

Primetimo da DNF formule F_1 može da se „prevede” na prirodan jezik (srpski) rečenicom:

Formula F_1 je tačna

- ako su sva tri iskazna slova p, q i r tačna
- ili ako je p netačno, q tačno i r netačno
- ili ako su sva tri iskazna slova p, q i r netačna.

Ako prebacimo DNF formule F_1 u algebarsku notaciju, dobijamo:

$$p \cdot q \cdot r + \bar{p} \cdot q \cdot \bar{r} + \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}$$

p	q	r	F_2	formula reda tablice
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$p \wedge q \wedge \neg r$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$p \wedge \neg q \wedge r$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\neg p \wedge q \wedge r$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	

DNF(F_2): $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

Tabela 1.8: DNF formule F_2

Primenjujući isti postupak opisan u Teoremi 1.3, dobijamo i DNF formule F_2 (Tabela 1.8).

Ako prebacimo DNF formule F_2 u algebarsku notaciju, dobijamo:

$$p \cdot q \cdot \bar{r} + p \cdot \bar{q} \cdot r + \bar{p} \cdot q \cdot r$$

Formula F_2 je tačna

- ako je p tačno, q tačno i r netačno
- ili ako je p tačno, q netačno i r tačno
- ili ako je p netačno, q tačno i r tačno. $\diamondsuit$

KNF — konjunktivna normalna forma

Definicija 1.20. Ako postoji iskazna formula G, sastavljena od jedne ili više elementarnih disjunkcija povezanih veznikom konjunkcije, koja je ekvivalentna zadatoj formuli F, onda se formula G naziva **konjunktivnom normalnom formom** (skr. **KNF**) formule F.

Primer 1.28. Na osnovu De Morganovog zakona (negacija konjunkcije, Tabela 1.6) odmah sledi da je formula $\neg p \vee \neg q$ DNF formule $\neg(p \wedge q)$ (ako se literali posmatraju kao elementarne konjunkcije), ali takođe i njena KNF (ako se formula $\neg p \vee \neg q$ posmatra kao jedna elementarna disjunkcija). $\diamondsuit$

Teorema 1.4 KNF. Neka je F iskazna formula različita od $\top$ i neka je T njena istinitosna tablica. KNF formule F se konstruiše na sledeći način:

(i) Za svaki red tablice T, u kome formula F ima istinitosnu vrednost $\perp$, pravimo po jednu formulu (u daljem tekstu teoreme: formula reda tablice). Formula reda tablice se sastoji od literala povezanih disjunkcijom ($\vee$). Literali se formiraju od svih različitih iskaznih slova formule, pri čemu iskaznom slovu x odgovara literal x ako i samo ako u tom redu tablice x ima vrednost $\perp$, odnosno iskaznom slovu x odgovara literal $\neg x$ ako i samo ako u tom redu tablice x ima vrednost $\top$ (dakle, pišemo negaciju ispred onih iskaznih slova kojima u tom redu tablice odgovara vrednost $\top$).

(ii) Ako formule prethodnog koraka stavimo u zagrade i međusobno ih povežemo konjunkcijom ($\wedge$), dobijena formula predstavlja KNF formule F zadate istinitosnom tablicom T. $\square$

Primer 1.29. Odredimo KNF za dve nepoznate formule, G_1 i G_2, ako je data njihova istinitosna tablica:

p	q	r	G_1	G_2
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

Najpre uočimo redove istinitosne tablice u kojima je formula G_1 netačna (Tabela 1.9). Vrednosti iskaznih slova i formule u tim redovima su označeni crvenom bojom, a vrednost formule i fontom veće težine. Za svaki red u kome je G_1 netačna konstruišemo odgovarajuću formulu reda kao disjunkciju odgovarajućih literala (ako je u posmatranom redu iskazno slovo p tačno, koristimo literal $\neg p$; ako je p netačno, koristimo literal p i na isti način za iskazna slova q i r). KNF formule G_1 se dobija kao konjunkcija konstruisanih formula (u zagradama) za pojedinačne redove. KNF formule G_1 može

p	q	r	G_1	formula reda tablice
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	
$\top$	$\top$	$\bot$	$\boldsymbol{\bot}$	$\neg p \vee \neg q \vee r$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\boldsymbol{\bot}$	$p \vee \neg q \vee r$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\boldsymbol{\bot}$	$p \vee q \vee \neg r$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	

KNF(G_1): $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$

Tabela 1.9: KNF formule G_1

da se „prevede” na prirodan jezik (srpski) rečenicom:

Formula G_1 je netačna

- ako je p tačno, q tačno i r netačno
- ili ako je p netačno, q tačno i r netačno
- ili ako je p netačno, q netačno i r tačno.

U ovom slučaju prevod ne odgovara zapisu formule, već tumačenju njene istinitosne vrednosti. KNF, kao konjunkcija formula redova, biće netačna ako i samo je bar jedna od tih formula redova netačna (otuda u prevodu „ili” umesto „i”). Formula pojedinačnog reda, kao disjunkcija literala, biće netačna ako i samo je svaki literal netačan (odatle u prevodu „i” umesto „ili” i zato su tačna iskazna slova prevod literala sa negacijom, a netačna iskazna slova — prevod literala bez negacije; na kraju krajeva, po tim pravilima su literali i konstruisani).

Ako prebacimo KNF formule G_1 u algebarsku notaciju, dobijamo:

$$(\bar{p} + \bar{q} + r) \cdot (p + \bar{q} + r) \cdot (p + q + \bar{r})$$

Primenjujući isti postupak opisan u Teoremi 1.4, dobijamo i KNF formule G_2 (Tabela 1.10).

p	q	r	G_2	formula reda tablice
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\neg p \lor \neg q \lor \neg r$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\neg p \lor q \lor \neg r$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\neg p \lor q \lor r$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$(p \lor \neg q \lor \neg r)$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	

KNF(G_2): $(\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \land (\neg p \lor q \lor \neg r) \land (\neg p \lor q \lor r) \land (p \lor \neg q \lor \neg r)$

Tabela 1.10: KNF formule G_2

Ako prebacimo KNF formule G_2 u algebarsku notaciju, dobijamo:

$$(\bar{p} + \bar{q} + \bar{r}) \cdot (\bar{p} + q + \bar{r}) \cdot (\bar{p} + q + r) \cdot (p + \bar{q} + \bar{r})$$

$\diamondsuit$

Primetimo da se postupak za određivanje KNF formule na osnovu njene istinitosne tablice (Teorema 1.4) neposredno dobija iz postupka za određivanje KNF tako što vrednosti (tačno, netačno) i iskazne operacije (konjunkcija, disjunkcija), kao i njihovi simboli $\top$ i $\bot$, odnosno $\land$ i $\lor$, međusobno razmenjuju uloge.