Informatika za bibliotekare 1

beleške sa predavanja

Miloš Utvić

Sadržaj

Uvod

Cilj ovog kursa nije da od filologa napravi matematičare. Matematika je samo sredstvo koje informatika s vremena na vreme koristi bilo da bi definisala svoje pojmove (na primer *kodiranje*, bez obzira na koji od engleskih pojmova *encoding* i *encryption* se odnosi, definiše se preko matematičkog pojma 1-1 funkcije) bilo da bi primenila neku oblast matematike (na primer, matematička logika se primenjuje za konstrukciju delova procesora, kao i u programiranju kako bi program automatski donosio odluku koje će naredbe da izvrši u zavisnosti od toga da li je neki uslov ispunjen ili ne itd.). U tom smislu, akcenat kursa je na upoznavanju i razumevanju osnovnih matematičkih pojmova neophodnih u informatici, od kojih će glavnina pojmova (skup, niz, relacija, funkcija, operacija) biti preciznije definisana u okviru predmeta Informatika za bibliotekare 2. U ovom kursu koristićemo *skup* kao osnovni pojam, tj. pojam za koji svi „znamo" šta predstavlja i zato ga ne definišemo.

U prvom delu kursa bavićemo se isključivo različitim skupovima brojeva.

Pored literature navedene na kraju, uz ove beleške se može paralelno koristiti i materijal profesorke Cvetane Krstev (2002), posebno poglavlje 1, „Brojevi i brojni sistemi".[1]

1 Predavanje, 9. X

1.1 Brojevi

Brojevi nisu nešto što postoji mimo ljudi, njih su izmislili ljudi. I danas se mogu pronaći ljudske zajednice u Africi, Južnoj Americi i drugim delovima sveta, kod kojih ne postoji predstava o broju, čak se u jezicima tih ljudi koriste različite reči kada se govori o istoj količini različitih predmeta ili bića [Mlodinov, 2005: 16–17].

Jedan od motiva za nastanak brojeva je potreba za upoređivanjem dva skupa. Najjednostavniji način za upoređivanje dva skupa A i B je izdvajanje jednog po jednog para elemenata, pri čemu prvi element uzimamo iz A, a drugi iz B i svaki element uzimamo samo jednom. Proces izdvajanja parova se završava u jednom od sledećih slučajeva:

(i) u skupu A je preostao bar jedan element za izdvajanje, a u skupu B više nema elemenata za izdvajanje;

(ii) u skupu B je preostao bar jedan element za izdvajanje, a u skupu A više nema elemenata za izdvajanje;

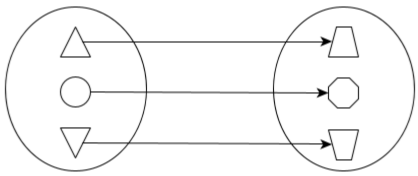
(iii) ni u skupu A ni u skupu B nema više elemenata za izdvajanje .

Opisanim procesom izdvajanja parova se dolazi do zaključka da je ili jedan skup „veći" od drugog (u prvom slučaju je A „veći" skup, a u drugom — B) ili da su skupovi

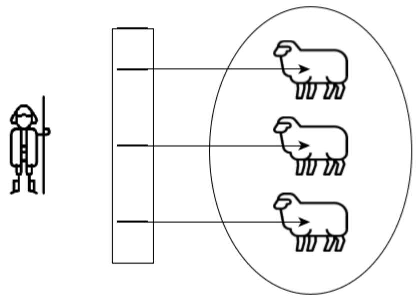
[1] http://poincare.matf.bg.ac.rs/~cvetana/Nastava/Materijal/BrojniSistemi.pdf

A i B „iste veličine".[2] U poslednjem slučaju se pojavljuje potreba za uvođenjem brojeva: konkretan broj opisuje ono što je zajednička osobina svih skupova „iste veličine" (Slika 1.1).

Pre pojave pisma i zapisivanja broja, ljudi najčešće koriste objekte iz prirode kako bi njima označili neki broj [Dantzig, 2005: 7]: na primer, krila ptice za broj dva, list deteline za broj tri, noge četvoronožne životinje za broj četiri, ali nesumnjivo i delove ljudskog tela, poput prstiju šake.[3] Pastirski štap sa zasecima koji odgovaraju pojedinačnim životinjama u stadu je jedan od načina zapisivanja brojeva [Bilimović, 1965: 11] i predstavlja poseban slučaj raboša, komada drveta koji se od davnina koristio za beleženje imovine, dugovanja, pa čak i kao kalendar. Uparivanjem zaseka i životinja pastir proverava da li je sačuvao celo stado (Slika 1.1).



(a) Uparivanje kao potvrda da su dva skupa „iste veličine"



(b) Pastirski štap kao sredstvo za proveru celokupnosti stada

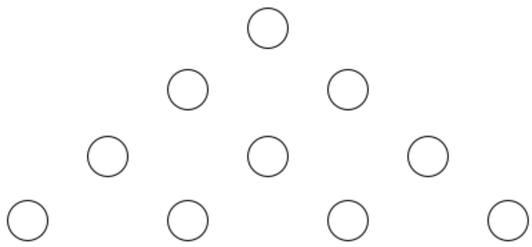
Slika 1.1: U osnovi brojanja je upoređivanje dva skupa

Oznake ne treba poistovećivati sa onim što označavaju. Broj deset i oznaka 10 su dve različite stvari. Mi smo navikli da ih posmatramo kao jedno te isto, ali oni to nisu. Štaviše, 10 može, ali ne mora da označava broj deset isto kao što simbol H nekada tumačimo kao ćirilično slovo, a nekad kao latinično slovo, a ta dva slova nisu ista, tj. ne označavaju iste stvari.

Broj deset u nastavku kursa treba zamišljati ne kao 10, već kao količinu (na primer deset kamenčića, Slika 1.2).

[2] Matematičari bi rekli da se u poslednjem slučaju između skupova A i B može uspostaviti obostrano 1–1 preslikavanje, obostrano jednoznačna korespodencija ili „bijekcija".

[3] Engleski izraz „give me five" je primer poistovećivanja šake i broja 5.



Slika 1.2: Deset kao određena količina (na primer kamenčića)

Broj deset, suprotno onome što su nas učili, nije ni „okrugao” ni neki poseban broj u odnosu na ostale. Činjenica je da se sa njime lako množi i deli u brojnom sistemu koji koristimo, ali to nije zbog njegove „prirode” već, kao što ćemo videti kasnije, oznaka 10 omogućava tu „magiju”.

Deset je samo količina izabrana kao jedinica mere prilikom brojanja, gotovo sigurno zato što čovek ima deset prstiju. Međutim, kako navode Kurant i Robins (1973: 6), postoje razni dokazi da su i drugi brojevi poput 12, 20 i 60 korišćeni kao jedinice mere prilikom brojanja. Neki od tih dokaza su lingvistički (imena brojeva u pojedinim jezicima, na primer 1–19 u engleskom i nemačkom, 20 i 80 u francuskom, 70 u danskom itd.), a neke dokaze pronalazimo kao odnos većih i manjih mernih jedinica koje koristimo za opis vremenskih intervala (godina ima dvanaest meseci, a ne deset; dan i noć su podeljen na po dvanaest sati; jedan sat nema sto minuta već šezdeset, kao što i minut sadrži šezdeset sekundi, a ne sto).

1.2 Zapisi brojeva. Rimski brojevi

Postoji više verzija zapisa brojeva u starom (antičkom) Rimu, ovde ćemo razmotriti jednu verziju koja koristi sedam cifara (Tabela 1.2).

rimska cifra	I	V	X	L	C	D	M
vrednost cifre	1	5	10	50	100	500	1000

Tabela 1.2: Rimske cifre i njihove apsolutne vrednosti

Svaka cifra uvek ima istu vrednost koja predstavlja ili stepen broja deset ili polovinu nekog stepena broja deset. Činjenica da čovek ima pet prstiju na jednoj ruci, odnosno deset na obe ruke, nesumnjivo je uticala na vrednosti rimskih cifara.

Zapis pomoću rimskih brojeva je zapravo skraćeno predstavljanje vrednosti broja kao zbira ili razlike apsolutne vrednosti pojedinačnih cifara koje su uvek iste bez obzira na poziciju gde se nalaze (Tabela 1.2). Jedino na šta pozicija rimske cifre utiče jeste znak vrednosti cifre: ako se cifra sa manjom apsolutnom vrednošću nađe na poziciji levo od cifre sa većom apsolutnom vrednošću, tada se njena vrednost ne dodaje na zbir već se oduzima; u suprotnom, vrednost cifre je uvek pozitivna. U praksi se zapis sa oduzimanjem uglavnom koristi za vrednosti brojeva 4, 9, 40, 90, 400, 900, tj. istovetna cifra se navodi uzastopce najviše tri puta.

$$
\begin{aligned}
&\texttt{IV} = -1 + 5 = 4 \qquad (\cancel{\texttt{IIII}})\\
&\texttt{IX} = -1 + 10 = 9 \qquad (\cancel{\texttt{VIIII}})\\
&\texttt{XL} = -10 + 50 = 40 \qquad (\cancel{\texttt{XXXX}})\\
&\texttt{XC} = -10 + 100 = 90 \qquad (\cancel{\texttt{LXXXX}})\\
&\texttt{CD} = -100 + 500 = 400 \qquad (\cancel{\texttt{CCCC}})\\
&\texttt{CM} = -100 + 1000 = 900 \qquad (\cancel{\texttt{DCCCC}})
\end{aligned}
$$

Takođe, izuzimajući slučajeve oduzimanja, rimske cifre sa pozitivnom vrednošću se u zapisu broja uvek navode tako da se sleva nadesno smanjuje vrednost cifara (levo su cifre sa najvećom vrednošću, a desno sa najmanjom).

Primer 1.1. Izračunati vrednost rimskog broja `MMCMLXXVI`.

Rešenje. Uzimajući u obzir vrednosti rimskih cifara i činjenicu da je cifra `C` (100) levo od cifre `M` (1000), vrednost datog rimskog broja je

$$1000 + 1000 + (-100 + 1000) + (50 + 10 + 10) + (5 + 1) = 2000 + 900 + 70 + 6 = 2976. \quad \square$$

Primer 1.2. Dekadni broj 1489 pretvoriti u rimski broj.

Rešenje. Dati broj razbićemo na zbir i razliku stepena broja deset i polovina stepena broja deset:

$$1459 = 1000 + 400 + 80 + 9 = 1000 + (-100 + 500) + (50 + 10 + 10 + 10) + (-1 + 10)$$

Traženi zapis je `MCDLXXXIX`. $\square$

Najveći broj koji se može predstaviti u ovoj verziji rimskih brojeva je `MMMCMXCIX`, tj. 3999. Broj 4000 možemo predstaviti koristeći ista pravila jedino ako prethodno uvedemo oznaku za broj 5000. Jasno je da je glavni nedostatak sistema rimskih brojeva neprekidna potreba za uvođenjem novih oznaka stepena broja deset i polovina tih stepena. Osim toga, pokušaj formulisanja pravila za računanje u ovom sistemu doveo bi do ogromnog broja pravila za razne pojedinačne slučajeve. U tom smislu, nije ni čudo što matematika nije napredovala u starom Rimu, već se oslanjala na znanja pokorenih civilizacija, pre svega matematiku antičke Grčke koja je takođe koristila sistem za zapis brojeva sličan rimskom, ali sa drugačijim oznakama.

Za vežbanje pretvaranja dekadnih brojeva u rimske i obratno može se koristiti materijal na stranici predmeta pod nazivom *Nepozicioni brojni sistemi. Rimski brojevi (konverzija rimskih brojeva u dekadne i obrnuto)*. U pitanju je onlajn program za konverziju brojeva u rimski zapis i obratno koji ujedno generiše i objašnjenje (korak po korak) na koji način se obavljaju obe konverzije:

FIL:

`http://www.fil.bg.ac.rs/misko/flf/i1/materijali/brojevi/rimskiBrojevi.html`

MATF:

http://arhimed.matf.bg.ac.rs/~misko/flf/i1/materijali/brojevi/rimskiBrojevi.html

2 Predavanje, 16. X

2.1 Prirodni brojevi. Operacije

U srednjoškolskoj matematici se za skup prirodnih brojeva uglavnom koriste dve oznake u zavisnosti od toga da li se nula smatra prirodnim brojem ili ne:

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, skup prirodnih brojeva
2. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, prošireni skup prirodnih brojeva

Iako će se pojam operacije detaljno razmatrati u okviru predmeta Informatika za bibliotekare 2, moramo ovde da ga pomenemo kako bismo odbacili neke primere pogrešne upotrebe matematičke terminologije. Naime, u običnom govoru se sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje često nazivaju operacijama, ali bolje ih je nazivati računskim radnjama pošto u matematici pojam operacije (na skupu) ima tačno određeno značenje, tako da neke od računskih radnji mogu biti operacije pod određenim uslovima, dok neke ne. U matematici ne znači ništa (pogrešno je) reći da je nešto operacija sve dok precizno ne kažete na kom skupu smatrate da se radi o operaciji. Neformalno rečeno, ako posmatramo neki skup brojeva, zovimo ga B, tada će neka radnja biti operacija na skupu B ako se tom radnjom određen (fiksiran) broj elemenata skupa B, uzet u tačno određenom redosledu, transformiše u rezultat koji je ponovo element skupa B. Da li su sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje operacije u navedenom smislu na skupu prirodnih brojeva? Sve navedene radnje transformišu dva prirodna broja u nekakav rezultat koji može, a ne mora biti prirodan broj.

Ako sabirate dva prirodna broja, rezultat (zbir) je uvek prirodan broj. Dakle, sabiranje jeste operacija na skupu prirodnih brojeva (tačnije, i na skupu $\mathbb{N}$ i na skupu $\mathbb{N}_0$).

Ako oduzimate dva prirodna broja, rezultat (razlika) će nekada biti prirodan broj ($5 - 2$ na primer), nekad ne (na primer, $2 - 5$ nije prirodan broj). Dakle, oduzimanje nije operacija na skupu prirodnih brojeva (ni na skupu $\mathbb{N}$, ni na skupu $\mathbb{N}_0$). Oduzimanje je ujedno i primer da redosled prirodnih brojeva koji učestvuju u toj radnji utiče na rezultat oduzumanja, dok kod sabiranja redosled sabiraka ne igra nikakvu ulogu, tj. zbir je uvek isti bez obzira na redosled sabiraka.

Ako množite dva prirodna broja, rezultat je uvek prirodan broj. Dakle, množenje jeste operacija na skupu prirodnih brojeva (i na skupu $\mathbb{N}$ i na skupu $\mathbb{N}_0$). Ovo nije neočekivan rezultat, pošto množenje nije ništa drugo već ponovljeno sabiranje: umesto da pišemo $3 + 3 + 3 + 3 + 3$, možemo pisati $3 \cdot 5$ ili $5 \cdot 3$. Dakle, i kod množenja redosled brojeva koji učestvuju u toj radnji (činioci ili faktori) ne utiče na rezultat množenja (proizvod), baš kao što redosled sabiraka ne utiče na zbir. Dakle, svojstva množenja su direktna posledica svojstava sabiranja.

Deljenje zaslužuje posebnu pažnju. Postoji nekoliko vrsta deljenja, ovde ćemo razmotriti celobrojno deljenje na skupu prirodnih brojeva.

2.2 Celobrojno deljenje

Kao što je množenje ponovljeno sabiranje, tako je i celobrojno deljenje ponovljeno oduzimanje. Podsetimo se primera iz osnovne škole. Potrebno je 7 jabuka podeliti na 3 prijatelja tako da svako dobije što više celih jabuka, a da svi dobiju podjednak broj. Jedan način podele bi bio po krugovima, u svakom krugu, ako imamo bar tri jabuke, svakom prijatelju damo po jednu, što znači da se u svakom krugu broj jabuka smanjuje za tri. Već posle drugog kruga ostaje samo $7 - 3 - 3 = 1$ jabuka te se deoba prekida. Broj jabuka koji je dobio svaki prijatelj je isti kao broj uspešnih krugova oduzimanja (2) i taj broj nazivamo *količnik pri celobrojnom deljenju*, dok broj nepodeljenih jabuka (1) nazivamo *ostatak pri celobrojnom deljenju*. Sem navedenog primera, u matematici se dokazuje da važi i sledeća lema[4].

Lema 2.1 (Lema o ostatku)**.** Neka su a i b prirodni brojevi, $b > 0$. Tada postoje jedinstveni brojevi q i r takvi da važi

$$a = q \cdot b + r, \qquad 0 \leq r < b. \quad \square$$

Lema o ostatku zapravo tvrdi sledeće:

1. Celobrojnim deljenjem proizvoljnog prirodnog broja a (deljenik) brojem b (delilac $b > 0$) deljenik a može se na **jedinstven** način razložiti na zbir čiji jedan sabirak predstavlja proizvod količnika q i delioca b, dok je drugi sabirak ostatak r koji je broj iz skupa $\{0, 1, \ldots, b-1\}$.

   Primer 2.1. Sledeća razlaganja brojeva 19, 25 i 35 su posledica Leme o ostatku:

   $$\begin{aligned} 19 &= 3 \cdot 5 + 4 \qquad (a = 19, b = 5, q = 3, r = 4, \quad 0 \leq r = 4 < 5 = b) \\ 25 &= 2 \cdot 9 + 7 \qquad (a = 25, b = 9, q = 2, r = 7, \quad 0 \leq r = 7 < 9 = b) \\ 35 &= 5 \cdot 7 + 0 \qquad (a = 35, b = 7, q = 5, r = 0, \quad 0 \leq r = 0 < 7 = b). \end{aligned}$$

2. Ostatak je uvek prirodan broj manji od broja kojim se deli (delioca), a može biti i nula. U tom smislu u matematici nikada nećemo reći da je deljenje bez ostatka; ostatak uvek postoji, samo što je ponekad jednak nuli.

3. Celobrojno deljenje nije jedna, već dve povezane operacije na proširenom skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}_0$. Rezultat jedne operacije je celobrojni količnik, a druge ostatak pri celobrojnom deljenju. Ako izbacimo nulu iz skupa prirodnih brojeva, celobrojni količnik i ostatak pri celobrojnom deljenju više nisu operacije.

Operacije celobrojnog deljenja označavaćemo na sledeći način:

$$7/3 = 2 \text{ (količnik)}$$

$$7 \bmod 3 = 1 \text{ (ostatak)}$$

[4] Lema je skraćeni naziv za „pomoćno tvrđenje” u matematici.

2.3 Stepeni

Kao što je množenje ponovljeno sabiranje, tako su stepeni ponovljeno množenje.

Na primer, izraz $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ se skraćeno predstavlja kao 3^5, pri čemu se 3 naziva *osnova* stepena, 5 *izložilac* ili *eksponent* stepena.

U materijalu *Uvodna podsećanja* opisana su osnovna pravila rada sa stepenima:

1. Stepeni istih osnova se množe tako što se osnova prepiše, a izložioci saberu.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

2. Stepeni istih osnova se dele tako što se osnova prepiše, a izložioci oduzmu.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Neposredna posledica ovog pravila je da, ako podelite dva ista stepena jedan drugim, dobićete s jedne strane broj 1, a sa druge osnovu stepenovanu nulom. Dakle, svaki prirodan broj stepenovan nulom daje jedinicu.

$$a^0 = 1$$

3. Stepen čija je osnova takođe stepen naziva se stepen stepena, na primer $(3^4)^2$. Njegova vrednost se računa tako što se osnova njegove osnove (3) prepiše, a izložioci pomnože (u navedenom primeru $3^{(4\cdot 2)} = 3^8$).

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Navedena pravila računanja stepenima se neposredno proveravaju na primerima u kojima se umesto konkretnih brojeva (3, 4 i 5) mogu navesti proizvoljni prirodni brojevi:

$$3^5 \cdot 3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4} = 3^9 = 3^{5+4}$$

i slično za preostala pravila.

2.4 Pozicioni zapis brojeva

Šta znači zapis broja 324?

I način tumačenja zapisa: Zapis 324 označava količinu koju čine tri stotine, dve desetice i četiri jedinice. Šta predstavljaju desetice, stotine i hiljade (a takođe i količine poput deset hiljada, sto hiljada, milion, milijarda i tako dalje)? U pitanju su nazivi za stepene broja deset. Čak i jedinica može da se shvati kao stepen broja deset, pošto svaki broj (pa i deset) stepenovan nulom daje jedinicu ($10^0 = 1$).

II način tumačenja zapisa: Ako broj 324 podelimo sa deset (celobrojno deljenje), zabeležimo količnik i ostatak i nastavimo da ponavljamo postupak sa dobijenim količnikom sve dok u nekom trenutku količnik ne postane nula, dobijamo sledeći rezultat (prvi red označava vrednosti količnika, a drugi — vrednosti ostatka pri celobrojnom deljenju):

količnik	324	32	3	0
ostatak	4	2	3	

Vidimo da su cifre zapisa zapravo ostaci pri deljenju sa deset, zapisani u obrnutom redosledu u odnosu na redosled kojim su izračunati (poslednji dobijeni ostatak 3 je prva cifra u zapisu broja 324).

Ako izaberemo neki prirodan broj veći od 1, zovimo ga *osnova*, tada I način tumačenja zapisa govori da se svaki prirodan broj može razložiti na zbir stepena osnove. Stepeni osnove ovde predstavljaju različite manje i veće merne jedinice u procesu brojanja, kao što se u fizici koristi SI sistem mera sa manjim i većim jedinicama (na primer, milimetar, centimetar, decimetar, dekametar, hektometar, kilometar itd. kao manje i veće merne jedinice u odnosu na osnovnu mernu jedinicu za dužinu — metar). Pri tome je odnos veće i manje jedinice za svaku fizičku veličinu u SI sistemu određeni stepen broja deset (kilometar je 10^3 metara, metar je 10^2 centimetara, centimetar je 10 milimetara itd.).

Prilikom razlaganja se trudimo da krajnji koeficijenti uz stepene uvek budu manji od osnove kako bi se u razlaganju pojavili najviši mogući stepeni osnove. Među razlaganjima (R_1)-(R_5) broja trideset sedam na zbir stepena broja deset, šesnaest, dvanaest, pet i dva, razlaganja (R_4) i (R_5) najbolje ilustruju da se željeni rezultat postiže tako što koeficijente uz stepene delimo osnovom sve dok se ne postigne da koeficijent uz svaki stepen osnove bude neki ostatak pri deljenju osnovom:

$$(R_1)\qquad \text{trideset sedam} = 3 \cdot 10 + 7 = 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

$$(R_2)\qquad \text{trideset sedam} = 2 \cdot 16 + 5 = 2 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0$$

$$(R_3)\qquad \text{trideset sedam} = 3 \cdot 12 + 1 = 3 \cdot 12^1 + 1 \cdot 12^0$$

$$(R_4)\qquad \begin{aligned} \text{trideset sedam} &= 7 \cdot 5 + 2 = \\ &= (1 \cdot 5 + 2) \cdot 5 + 2 = \\ &= 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 \end{aligned}$$

$$(R_5)\qquad \begin{aligned} \text{trideset sedam} &= 18 \cdot 2 + 1 = \\ &= (9 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1 = \\ &= 9 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = \\ &= (4 \cdot 2 + 1) \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = \\ &= 4 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = \\ &= (2 \cdot 2 + 0) \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = \\ &= 2 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = \\ &= (1 \cdot 2 + 0) \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = \\ &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \end{aligned}$$

U razlaganjima (R_1)-(R_5) namerno uzimamo u obzir svaki količnik i ostatak kako bi se u krajnjem razlaganju pojavili svi stepeni izabrane osnove, bez obzira da li je njihov koeficijent nula ili ne. Na taj način, izborom određene osnove za osnovnu mernu jedinicu količine, istu količinu „trideset sedam” možemo predstaviti kao zbir (većih i manjih) izvedenih mernih jedinica za količinu koje su, u stvari, stepeni osnovne jedinice.

Po ugledu na zapis (Z_1) koji smo navikli da koristimo u dekadnom brojnom sistemu, razlaganja (R_1)-(R_5) broja trideset sedam možemo skraćeno zapisati na sledeće načine:

(Z_1)	trideset sedam $= 37_{10} = 37$	(zapis u osnovi deset)
(Z_2)	trideset sedam $= 25_{16}$	(zapis u osnovi šesnaest)
(Z_3)	trideset sedam $= 31_{12}$	(zapis u osnovi dvanaest)
(Z_4)	trideset sedam $= 122_5$	(zapis u osnovi pet)
(Z_5)	trideset sedam $= 100101_2$	(zapis u osnovi dva)

Pri tome je važno i kako čitamo zapise (Z_1)-(Z_5):

(C2) 25_{16} nije „dvadeset pet”, već „dva pet u osnovi šesnaest”, u smislu „dva puta šesnaest plus pet”;

(C2) 31_{12} nije „trideset jedan”, već „tri jedan u osnovi dvanaest”, u smislu „tri puta dvanaest plus jedan”;

(C2) 122_5 nije „sto dvadeset dva”, već „jedan dva dva u osnovi pet”, u smislu „jedan kvadrat petice plus dve petice plus dva”;

(C2) 100101_2 nije „sto hiljada sto jedan”, već „jedan nula nula jedan nula jedan u osnovi dva”, u smislu „zbir stepena broja dva u kom se pojavljuje jedan peti stepen broja dva, nijedan četvrti stepen broja dva, nijedan treći stepen broja dva, jedan kvadrat broja dva, nijedan prvi stepen broja dva i jedan nulti stepen broja dva”.

Zašto izbegavamo da broj jedan koristimo kao osnovu? S jedne strane, svi stepeni broja 1 su jednaki 1; s druge strane, svaki broj je deljiv jedinicom, tj. ostaci pri deljenju jedinicom su uvek jednaki nuli. To bi značilo da je najveća (i jedina) cifra u sistemu sa osnovom 1 jednaka nuli. Samim tim, brojeve veće od 1 ne možemo razložiti na zbir stepena jedinice na način sličan razlaganjima (R_1)-(R_5), niti uvesti skraćeni zapis tih razlaganja poput (Z_1)-(Z_5). Ako bismo napravili izuzetak i dozvolili da jedino u sistemu sa osnovom 1 i sama osnova bude tretirana kao cifra, onda bi se zapis prirodnog broja n sveo na $\underbrace{11\ldots1}_{n}$, što bi bio izuzetno nepraktičan zapis, a o mogućnostima računanja sa tim zapisom i da ne govorimo. Osim toga, svaka oznaka 1, 10, 100, $1\underbrace{00\ldots0}_{n}$ bi označavala istu količinu (jedan), a i ostali prirodni brojevi bi imali višestruku reprezentaciju (na primer, količina 2 bi mogla da se predstavi kao 11, 101, 1010, 1001, $1\underbrace{00\ldots0}_{n}1$ itd.)

Zaključci:

1. Ako uporedimo zapis broja trista trideset tri u rimskom i dekadnom sistemu (CCCXXXIII i 333) vidimo sledeće: u rimskom sistemu svaka ista cifra vredi isto bez obzira na kojoj se poziciji nalazi (C je uvek sto, X je uvek deset, I je uvek jedan) jedino se menja znak ispred cifre ako je manja cifra levo od veće (IV $= -1 + 5$). Međutim, u dekadnom sistemu vrednost cifre zavisi od pozicije na kojoj se nalazi, zato što svaka pozicija odgovara različitom stepenu osnove (prva trojka vredi tri puta sto, druga — tri puta deset, a treća samo tri). Zato se brojni sistemi poput rimskog nazivaju nepozicioni brojni sistemi, dok je dekadni sistem primer pozicionog brojnog sistema.

2. Kao što smo se dogovorili u prvom razredu osnovne škole da broj predstavljamo zapisom koji označava koliko on sadrži određenih stepena broja deset (jedinice, desetice, hiljade itd.), isto tako je mogao pasti dogovor pri kojem bi umesto broja deset izabrali neki drugi prirodan broj n ($n > 1$) kao osnovu. U tom slučaju zapis proizvoljnog prirodnog broja m u osnovi n bi predstavljao skraćeni zapis razlaganja broja m na zbir stepena izabrane osnove n, pri čemu . Prema tome, dekadni sistem nije jedini pozicioni sistem, već svaki prirodni broj n veći od jedan definiše jedan pozicioni brojni sistem sa osnovom n.

3. Nije potrebno da zadati broj razlažemo na zbir stepena neke osnove da bismo dobili zapis broja u toj osnovi. Dovoljno je da broj podelimo osnovom, zabeležimo količnik i ostatak i ponavljamo postupak deleći svaki put poslednji dobijeni količnik osnovom sve dok ne dobijemo količnik nula. Tada dobijeni ostaci (uključujući i nule), uzeti u obrnutom redosledu od onog kojim su izračunati formiraju zapis broja u korišćenoj osnovi. Opisani algoritam („recept") za konverziju broja iz dekadnog broja sistema u zadatu osnovu n, kao i tumačenje pozicionog zapisa broja u osnovi n (što je isto što i konverzija iz sistema sa osnovom n u osnovu deset), predstavljaju najvažnije gradivo koje treba savladati za dalji rad.

Primer 2.2. Sledeće brojeve pretvoriti iz dekadnog sistema u sistem sa osnovom dva, pet i sedam, a potom proveriti tačnost dobijenog pozicionog zapisa broja obrnutom konverzijom u dekadni sistem: a) 149; b) 5782; c) 10931.

Rešenje. a) Pretvorimo broj 149 u osnove dva, pet i sedam.

(i) Osnova 2:

Primenićemo ranije opisani postupak uzastopnog celobrojnog deljenja broj 149 osnovom u koju želimo da ga prebacimo (dva), pri čemu u tabeli beležimo količnike (u prvom redu tabele) i ostatke (u drugom redu tabele). U prvoj ćeliji prvog reda beležimo sam broj 149, u susednoj ćeliji desno beležimo njegov količnik pri deljenju sa dva, a u susednoj ćeliji ispod beležimo ostatak pri tom deljenju. Postupak ponavljamo za svaki dobijeni količnik sve dok ne dobijemo količnik jednak nuli.

149	74	37	18	9	4	2	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	

Zapis broja 149 u osnovi 2 formiramo zapisivanjem ostataka pri deljenju sa 2, ali u obrnutom redosledu u odnosu na njihovo računanje (zdesna nalevo):

$$149 = 1001\ 0101_2$$

Radi lakše čitljivosti u zapisu razdvajamo grupe od po četiri cifre zdesna nalevo i obavezno navodimo oznaku osnove pozicionog sistema (2).

Ostaje još da proverimo tačnost zapisa primenom obrnute konverzije iz sistema sa osnovom 2 u sistem sa osnovom deset (ispod pozicija cifara u zapisu su označeni izložioci odgovarajućeg stepena osnove):

$$\underset{7654\ 3210}{1001\ 0101_2} = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$
$$= 128 + 0 + 0 + 0 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 149.$$

(ii) Osnova 5: ponavljamo isti postupak, samo što sada delimo brojem 5 pošto on predstavlja osnovu.

149	29	5	1	0
4	4	0	1	

$$149 = 1044_5$$

$$\text{Provera:} \underset{3210}{1044_5} = 1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 =$$
$$= 125 + 0 + 20 + 4 = 149.$$

(iii) Osnova 7: ponavljamo isti postupak, samo što sada delimo brojem 7 pošto on predstavlja osnovu.

149	21	3	0
2	0	3	

$$149 = 302_7$$

$$\text{Provera:} \underset{210}{302_7} = 3 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 3 \cdot 49 + 0 + 2 = 147 + 0 + 2 = 149.$$

b) Pretvorimo broj 5782 u osnove dva, pet i sedam.

(i) Osnova 2:

5782	2891	1445	722	361	180	90	45	22	11	5	2	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	

$$5782 = 1\ 0110\ 1001\ 0110_2$$

Provera (ispod pozicija cifara u zapisu broja označeni su izložioci odgovarajućeg stepena osnove, pri čemu su dvocifreni izložioci 10, 11 i 12 zbog jednostavnijeg zapisa predstavljeni samo poslednjom cifrom koja je podvučena):

$$\begin{aligned}
\underset{\underline{2}}{1}\;\underset{\underline{1}}{0}\underset{\underline{0}}{1}\underset{9}{1}\underset{8}{0}\;\underset{7}{1}\underset{6}{0}\underset{5}{0}\underset{4}{1}\;\underset{3}{0}\underset{2}{1}\underset{1}{1}\underset{0}{0}{}_2 &= 1\cdot 2^{12}+0\cdot 2^{11}+1\cdot 2^{10}+1\cdot 2^{9}+0\cdot 2^{8}+1\cdot 2^{7}+0\cdot 2^{6}+\\
&+0\cdot 2^{5}+1\cdot 2^{4}+0\cdot 2^{3}+1\cdot 2^{2}+1\cdot 2^{1}+0\cdot 2^{0}=\\
&=4096+0+1024+512+0+128+0+\\
&+0+16+0+4+2+0=5782.
\end{aligned}$$

(ii) Osnova 5:

5782	1156	231	46	9	1	0
2	1	1	1	4	1	

$$5782 = 14\ 1112_5$$

$$\begin{aligned}
\underset{5}{1}\underset{4}{4}\;\underset{3}{1}\underset{2}{1}\underset{1}{1}\underset{0}{2}{}_5 &= 1\cdot 5^5+4\cdot 5^4+1\cdot 5^3+1\cdot 5^2+1\cdot 5^1+2\cdot 5^0=\\
&=3125+4\cdot 625+125+25+5+2=\\
&=3125+2500+125+25+5+2=5782.
\end{aligned}$$

(iii) Osnova 7:

5782	826	118	16	2	0
0	0	6	2	2	

$$5782 = 2\ 2600_7$$

$$\begin{aligned}
\underset{4}{2}\;\underset{3}{2}\underset{2}{6}\underset{1}{0}\underset{0}{0}{}_7 &= 2\cdot 7^4+2\cdot 7^3+6\cdot 7^2+0\cdot 7^1+0\cdot 7^0=\\
&=2\cdot 2401+2\cdot 343+6\cdot 49+0+0=\\
&=4802+686+294+0+0=5782.
\end{aligned}$$

c) Pretvorimo broj 10931 u osnove dva, pet i sedam.

(i) Osnova 2:

10931	5465	2732	1366	683	341	170	85	42	21	10	5	2	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	

$$10931 = 10\ 1010\ 1011\ 0011_2$$

Provera (kao i u prethodnim primerima, dvocifreni izložioci 10, 11, 12 i 13 stepena osnove, navedeni ispod odgovarajućih pozicija u zapisu broja, predstavljeni su, zbog jednostavnijeg zapisa, samo poslednjom cifrom koja je podvučena):

$$\begin{aligned}
\underset{\underline{3}\underline{2}}{10}\ \underset{\underline{1}\underline{0}98}{1010}\ \underset{7654}{1011}\ \underset{3210}{0011}_2 &= 1\cdot 2^{13}+0\cdot 2^{12}+1\cdot 2^{11}+0\cdot 2^{10}+1\cdot 2^{9}+0\cdot 2^{8}+1\cdot 2^{7}+\\
&+0\cdot 2^{6}+1\cdot 2^{5}+1\cdot 2^{4}+0\cdot 2^{3}+0\cdot 2^{2}+1\cdot 2^{1}+1\cdot 2^{0}=\\
&=8192+0+2048+0+512+0+128+0+32+\\
&+16+0+0+2+1=10931.
\end{aligned}$$

(ii) Osnova 5:

10931	2186	437	87	17	3	0
1	1	2	2	2	3	

$$10931 = 32\ 2211_5$$

$$\begin{aligned}
\underset{54}{32}\ \underset{3210}{2211}_5 &= 3\cdot 5^5+2\cdot 5^4+2\cdot 5^3+2\cdot 5^2+1\cdot 5^1+1\cdot 5^0=\\
&=3\cdot 3125+2\cdot 625+2\cdot 125+2\cdot 25+5+1=\\
&=9375+1250+250+50+5+1=10931.
\end{aligned}$$

(iii) Osnova 7:

10931	1561	223	31	4	0
4	0	6	3	4	

$$10931 = 4\ 3604_7$$

$$\begin{aligned}
\underset{4}{4}\ \underset{3210}{3604}_7 &= 4\cdot 7^4+3\cdot 7^3+6\cdot 7^2+0\cdot 7^1+4\cdot 7^0=\\
&=4\cdot 2401+3\cdot 343+6\cdot 49+0+4=\\
&=9604+1029+294+0+4=\\
&=10931.
\end{aligned}$$

Ubuduće ispod cifara u pozicionom zapisu broja nećemo označavati izložioce. Oznake izložioca nam svakako neće biti potrebne prilikom računanja kratkih pozicionih zapisa (tj. prebacivanja u dekadni sistem brojeva koji nemaju više od 5 cifara), ali za duže zapise je poželjno da ih navedemo (makar negde sa strane, na pomoćnom delu papira) kako ne bismo pogrešili u računu.

Domaći zadatak 2.1. Brojeve iz primera 2.2 pretvoriti iz dekadnog sistema u sistem sa osnovom četiri i osam, a potom proveriti tačnost dobijenog pozicionog zapisa broja obrnutom konverzijom u dekadni sistem.

3 Predavanje, 23. X

3.1 „Magične" oznake 10, 100, 1000...

Šta predstavljaju oznake 10, 100, 1000 itd. u sistemu sa osnovom n? Pogledajmo primer 3.1.

Primer 3.1. Sledeće jednakosti određuju vrednost oznake 10 u pozicionim sistemima sa osnovom dva, tri, četiri, pet, osam i šesnaest.

$$\begin{aligned}
10_2 &= 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2^1 = 2 \\
10_3 &= 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = 3^1 = 3 \\
10_4 &= 1 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0 = 4^1 = 4 \\
10_5 &= 1 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 = 5^1 = 5 \\
10_8 &= 1 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 8^1 = 8 \\
10_{16} &= 1 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 = 16^1 = 16.
\end{aligned}$$

U opštem slučaju, ako posmatramo proizvoljnu osnovu n, oznaka 10_n predstavlja upravo osnovu n, tj. n^1:

$$10_n = 1 \cdot n^1 + 0 \cdot n^0 = n^1 = n$$

Šta predstavlja oznaka 100_n? Pogledajmo primer 3.2.

Primer 3.2. Sledeće jednakosti određuju vrednost oznake 100 u pozicionim sistemima sa osnovom dva, tri, četiri, pet, osam i šesnaest.

$$\begin{aligned}
100_2 &= 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2^2 && (= 4) \\
100_3 &= 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = 3^2 && (= 9) \\
100_4 &= 1 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0 = 4^2 && (= 16) \\
100_5 &= 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 = 5^2 && (= 25) \\
100_8 &= 1 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 8^2 && (= 64) \\
100_{16} &= 1 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 = 16^2 && (= 256).
\end{aligned}$$

U opštem slučaju, ako posmatramo proizvoljnu osnovu n, oznaka 100_n predstavlja kvadrat osnove n, odnosno n^2:

$$100_n = 1 \cdot n^2 + 0 \cdot n^1 + 0 \cdot n^0 = n^2$$

Šta predstavlja oznaka 1000_n? Pogledajmo primer 3.3.

Primer 3.3. Sledeće jednakosti određuju vrednost oznake 1000 u pozicionim sistemima sa osnovom dva, tri, četiri, pet, osam i šesnaest.

$$\begin{aligned}
1000_2 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2^3 && (= 8) \\
1000_3 &= 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = 3^3 && (= 27)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
1000_4 &= 1\cdot 4^3 + 0\cdot 4^2 + 0\cdot 4^1 + 0\cdot 4^0 = 4^3 && (= 64)\\
1000_5 &= 1\cdot 5^3 + 0\cdot 5^2 + 0\cdot 5^1 + 0\cdot 5^0 = 5^3 && (= 125)\\
1000_8 &= 1\cdot 8^3 + 0\cdot 8^2 + 0\cdot 8^1 + 0\cdot 8^0 = 8^3 && (= 512)\\
1000_{16} &= 1\cdot 16^3 + 0\cdot 16^2 + 0\cdot 16^1 + 0\cdot 16^0 = 16^3 && (= 4096).
\end{aligned}
$$

U opštem slučaju, ako posmatramo proizvoljnu osnovu n, oznaka 1000_n predstavlja kub osnove n, odnosno n^3:

$$1000_n = 1\cdot n^3 + 0\cdot n^2 + 0\cdot n^1 + 0\cdot n^0 = n^3$$

Može se pokazati da važi i opštije tvrđenje.

Lema 3.1 (Lema o „magičnim oznakama”)**.** Oznaka koja se sastoji iz cifre 1 iza koje sledi tačno k nula ($k \geq 1$) u pozicionom sistemu sa osnovom n označava k-ti stepen osnove n:

$$1\underbrace{0\ldots0}_{k}{}_n = n^k.$$

Zaista, prvoj nuli zdesna u zapisu $1\underbrace{0\ldots0}_{k}{}_n$ odgovara stepen osnove sa izložiocem 0, drugoj — sa izložiocem 1, itd. (uvek je izložilac za jedan manji od pozicije nule gledano zdesna nalevo). Prema tome, k-toj nuli zdesna u zapisu broja odgovara stepen osnove sa izložiocem $k-1$, a cifri 1 — sa izložiocem k, te je vrednost oznake $1\underbrace{0\ldots0}_{k}{}_n$ u sistemu sa osnovom n jednaka

$$1\underbrace{0\ldots0}_{k}{}_n = 1\cdot n^k + 0\cdot n^{k-1} + \cdots + 0\cdot n^1 + 0\cdot n^0 = n^k.$$

Dakle, oznake 10, 100, 1000... predstavljaju osnovu pozicionog sistema i njene stepene, pri čemu broj nula u oznaci predstavlja izložilac tog stepena. Samim tim, kada je potrebno osnovu n ili njen stepen pretvoriti iz dekadnog sistema u pozicioni sistem sa osnovom n, nema potrebe za računanjem količnika i ostataka pri deljenju sa n. Osnova pozicionog sistema će uvek biti označena sa 10, dok će njen stepen imati zapis koji se sastoji iz cifre 1 i onoliko nula iza jedinice koliki je izložilac tog stepena osnove.

Primer 3.4. Pretvoriti broj 23^7 u pozicioni zapis sa osnovom 23.

Rešenje. Pošto broj koji pretvaramo u pozicioni zapis sa osnovom 23 predstavlja sedmi stepen te osnove (23^7), na osnovu leme 3.1 (leme o „magičnim oznakama”) rešenje je odmah poznato:

$$1\underbrace{0\ldots0}_{7}{}_{23} = 1000\,0000_{23}. \quad \square$$

3.2 Opšte napomene o pozicionim brojnim sistemima

Pre nego što nastavimo sa daljim izlaganjem, potrebno je da preciziramo ono što smo do sada videli o pozicionim sistemima i da primetimo neke njihove osobine koje nismo naglasili na prethodnim časovima.

Cifre u pozicionom sistemu sa osnovom n mogu biti samo ostaci pri celobrojnom deljenju brojem n, tj. brojevi $0, 1, 2, \ldots n-1$. Prema tome, pozicioni brojni sistem ima tačno n različitih cifara: $0, 1, 2, \ldots n-1$.

Primer 3.5. Sistem sa osnovom deset (dekadni sistem) ima deset cifara: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9.

Sistem sa osnovom dva (binarni sistem) ima samo dve cifre: 0 i 1.

Sistem sa osnovom tri ima tri cifre: 0, 1 i 2.

Sistem sa osnovom četiri ima četiri cifre: 0, 1, 2 i 3.

Sistem sa osnovom pet ima pet cifara: 0, 1, 2, 3 i 4.

Sistem sa osnovom osam ima osam cifara: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7. □

Najveća cifra u sistemu sa osnovom n je $n-1$ (v. primer 3.5).

3.3 Sistemi čija je osnova veća od deset. Heksadekadni sistem

Sve osnove navedene u primeru 3.5 su manje od deset ili jednake tom broju. Kako izgledaju cifre u sistemima čija je osnova veća od deset?

Na osnovu onoga što smo videli, sistem sa osnovom dvanaest bi imao dvanaest cifara, a sistem sa osnovom šesnaest — šesnaest cifara. Najveća cifra u sistemu sa osnovom dvanaest bi imala vrednost za jedan manju od osnove, dakle, jedanaest, a slično, u sistemu sa osnovom šesnaest najveća cifra bi vredela petnaest. Kako označiti cifre deset, jedanaest (u sistemu sa osnovom dvanaest i šesnaest), odnosno cifre trinaest, četrnaest i petnaest (u sistemu sa osnovom šesnaest)? Oznake kojima smo do sada označavali te količine u dekadnom sistemu (10, 11, 12, 13, 14, 15) ne možemo da koristimo u sistemima sa osnovom većom od deset (pa time ni u sistemima sa osnovom dvanaest, odnosno šesnaest) iz dva razloga:

a) Ako određenu količinu hoćemo da tretiramo kao cifru sistema, oznaka količine mora predstavljati samo jednu cifru, a ne niz cifara.

b) Oznake 10, 11, 12, 13, 14, 15 predstavljaju sasvim druge količine u sistemima sa osnovom dvanaest, odnosno šesnaest u odnosu na njihove vrednosti u dekadnom sistemu.

   Naime, oznaka 10, kao što smo videli, označava osnovu:

$$10_{12} = 12$$
$$10_{16} = 16$$

   a i ostale oznake predstavljaju vrednosti različite od njihovi dekadnih vrednosti

$$11_{12} = 1 \cdot 12^1 + 1 \cdot 12^0 = 12 + 1 = 13$$

   odnosno

$$11_{16} = 1 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 = 16 + 1 = 17 \qquad \text{(sedamnaest)}$$

$$
\begin{aligned}
12_{16} &= 1 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0 = 16 + 2 = 18 && \text{(osamnaest)}\\
13_{16} &= 1 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 16 + 3 = 19 && \text{(devetnaest)}\\
14_{16} &= 1 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 = 16 + 4 = 20 && \text{(dvadeset)}\\
15_{16} &= 1 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 16 + 5 = 21 && \text{(dvadeset jedan)}
\end{aligned}
$$

Drugačije vrednosti ovih oznaka u odnosu na ono što smo navikli u dekadnom brojnom sistemu pojaviće se i u ostalim sistemima sa osnovom većom od deset. Kako bi se prevazišao ovaj problem, kada se količine veće od deset ili jednake tom broju tretiraju kao cifre, za njihovo označavanje se koriste slova engleske abecede:

A	B	C	D	E	F
deset	jedanaest	dvanaest	trinaest	četrnaest	petnaest

Primer 3.6. Sistem sa osnovom dvanaest ima dvanaest cifara: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$ `A` i `B`. Najveća cifra u sistemu sa osnovom dvanaest je `B` (jedanaest).

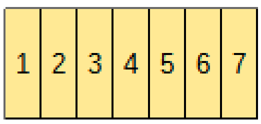
Sistem sa osnovom šesnaest ima šesnaest cifara: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$ `A`, `B`, `C`, `D`, `E` i `F`. Najveća cifra u sistemu sa osnovom šesnaest je `F` (petnaest). □

U nastavku izlaganja, izdvojićemo jedan pozicioni sistem sa osnovom većom od deset, koji, kao i binarni sistem, ima posebno mesto i primenu u informatici. U pitanju je pozicioni sistemo sa osnovom šesnaest poznatiji kao *heksadekadni* ili *heksadecimalni sistem*.

Pre nego što nastavimo dalje, odvojite 5 minuta i pokušajte sami da rešite sledeće zadatke:

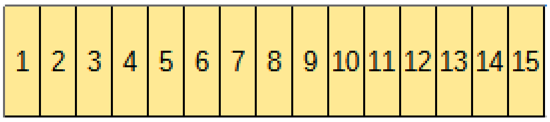
Domaći zadatak 3.1 (Lomljenje zlatne čokolade)**.**

a) Imate na raspolaganju zlatnu polugu u obliku čokoladne table koja se na 6 mesta može prelomiti tako da dobijete 7 identičnih delića poluge (slika 3.3). Angažovali ste radnika da radi 7 dana i na kraju svakog dana treba da ga platite u vrednosti jednog delića (sedmine) poluge. Kako da isplatite radnika tokom 7 dana posla ako polugu smete da prelomite najviše dva puta?



Slika 3.3: Zlatna čokoladna tabla sa 7 redića

b) U drugoj varijanti zadatka pod a) raspolažete polugom koja se na 14 mesta može prelomiti tako da dobijete 15 identičnih delića poluge (slika 3.4). Angažovali ste radnika da radi 15 dana i na kraju svakog dana treba da ga platite u vrednosti jednog delića (petnaestine) poluge. Kako da isplatite radnika tokom 15 dana posla ako polugu smete da prelomite najviše tri puta?



Slika 3.4: Zlatna čokoladna tabla sa 15 redića

3.4 Brzo pretvaranje cifara heksadekadnog sistema u binarne brojeve i obrnuto

Pogledajmo kako izgledaju cifre heksadekadnog sistema $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$ `A`, `B`, `C`, `D`, `E` i `F`) kada se pretvore u binarne brojeve. Dekadne vrednosti cifara heksadekadnog sistema odgovaraju brojevima od 0–15, pa je njihova vrednost manja od $16 = 2^4 = 10000_2$, najmanjeg petocifrenog binarnog broja. Prema tome, jasno je da se brojevi 0–15 mogu predstaviti binarnim brojevima koji imaju najviše četiri cifre. To je u skladu sa činjenicom da je $2^3 = 8$ najveći stepen broja 2 koji je manji od 15, što znači da se svaka cifra heksadekadnog sistema može predstaviti kao zbir stepena $2^3 = 8$, $2^2 = 4$, $2^1 = 2$ i $2^0 = 1$, pri čemu se svaki stepen pojavljuje u zbiru najviše jednom:

$$\underset{3}{\underline{\ \ }}\ \underset{2}{\underline{\ \ }}\ \underset{1}{\underline{\ \ }}\ \underset{0}{\underline{\ \ }}{}_2 = \overset{8}{\underline{\ \ }}\ \overset{4}{\underline{\ \ }}\ \overset{2}{\underline{\ \ }}\ \overset{1}{\underline{\ \ }}{}_2$$

Zapis četvorocifrenog binarnog broja ukazuje koji se od stepena $2^3 = 8$, $2^2 = 4$, $2^1 = 2$ i $2^0 = 1$ pojavljuje u zbiru, odnosno razlaganju dekadne vrednosti broja: ako je na poziciji nekog stepena cifra 0, taj stepen se ne pojavljuje u zbiru; ako je pak na poziciji nekog stepena cifra 1, to znači da se taj stepen pojavljuje kao sabirak u razlaganju broja.

Navedeno svojstvo četvorocifrenih binarnih brojeva omogućava jednostavniji način da odredimo binarni zapis za cifre heksadekadnog sistema i da izbegnemo celobrojno deljenje:

(i) Neka je V promenljiva koja je na početku jednaka dekadnoj vrednosti heksadekadne cifre.

(ii) Dekadnu vrednost heksadekadne cifre razlažemo na zbir stepena u četiri koraka tako što u svakom koraku pokušavamo da od promenljive V oduzmemo jedan po jedan stepen $2^3 = 8$, $2^2 = 4$, $2^1 = 2$ i $2^0 = 1$, redom od najvećeg ka najmanjem.

(iii) Ako je V veće ili jednako od stepena koji pokušavamo da oduzmemo, smanjujemo V za vrednost stepena, upisujemo 1 na poziciji koja odgovara tom stepenu u binarnom zapisu i postupak nastavljamo sa dobijenom razlikom, tj. novom vrednošću promenljive V.

(iv) Ako neki stepen ne možemo da oduzmemo od trenutne vrednosti promenljive V (zato što V ima manju vrednost od tog stepena), upisujemo 0 na poziciji koja odgovara tom stepenu u binarnom zapisu i postupak nastavljamo sa sledećim stepenom u nizu.

Primer 3.7. Ilustrujmo opisani postupak na primeru binarnog zapisa heksadekadnih cifara 6 i `D`.

a) Postupak za određivanje binarnog zapisa cifre 6:

(i) $V = 6$. Pošto je $6 < 8$, ne možemo da oduzmemo 8 od V i na poziciji koja odgovara tom stepenu upisujemo 0.

$$\underset{3}{0}\,\underset{2}{-}\,\underset{1}{-}\,\underset{0}{-}\,{}_2 = \overset{8}{0}\,\overset{4}{-}\,\overset{2}{-}\,\overset{1}{-}\,{}_2$$

(ii) $V = 6$. Pošto je $6 \geq 4$, možemo da oduzmemo 4 od V i na poziciji koja odgovara tom stepenu upisujemo 1.

$$\underset{3}{0}\,\underset{2}{1}\,\underset{1}{-}\,\underset{0}{-}\,{}_2 = \overset{8}{0}\,\overset{4}{1}\,\overset{2}{-}\,\overset{1}{-}\,{}_2$$

(iii) Nova vrednost $V = 6 - 4 = 2$. Pošto je $2 \geq 2$, možemo da oduzmemo 2 od V i na poziciji koja odgovara tom stepenu upisujemo 1.

$$\underset{3}{0}\,\underset{2}{1}\,\underset{1}{1}\,\underset{0}{-}\,{}_2 = \overset{8}{0}\,\overset{4}{1}\,\overset{2}{1}\,\overset{1}{-}\,{}_2$$

(iv) Nova vrednost $V = 2 - 2 = 0$. Pošto je $0 < 1$, ne možemo da oduzmemo 1 od V i na poziciji koja odgovara tom stepenu upisujemo 0.

$$\underset{3}{0}\,\underset{2}{1}\,\underset{1}{1}\,\underset{0}{0}\,{}_2 = \overset{8}{0}\,\overset{4}{1}\,\overset{2}{1}\,\overset{1}{0}\,{}_2$$

Dakle, $6_{16} = 0110_2$. Binarni zapis možemo da tumačimo dekadno na sledeći način: $6 = 0 + 4 + 2 + 0$, gde nule pišemo umesto stepena 8 i 1.

b) Postupak za određivanje binarnog zapisa cifre $\mathtt{D}_{16} = 13_{10}$:

(i) $V = 13$. Pošto je $13 \geq 8$, možemo da oduzmemo 8 od V i na poziciji koja odgovara tom stepenu upisujemo 1.

$$\underset{3}{1}\,\underset{2}{-}\,\underset{1}{-}\,\underset{0}{-}\,{}_2 = \overset{8}{1}\,\overset{4}{-}\,\overset{2}{-}\,\overset{1}{-}\,{}_2$$

(ii) $V = 13 - 8 = 5$. Pošto je $5 \geq 4$, možemo da oduzmemo 4 od V i na poziciji koja odgovara tom stepenu upisujemo 1.

$$\underset{3}{1}\,\underset{2}{1}\,\underset{1}{-}\,\underset{0}{-}\,{}_2 = \overset{8}{1}\,\overset{4}{1}\,\overset{2}{-}\,\overset{1}{-}\,{}_2$$

(iii) Nova vrednost $V = 5 - 4 = 1$. Pošto je $1 < 2$, ne možemo da oduzmemo 2 od V i na poziciji koja odgovara tom stepenu upisujemo 0.

$$\underset{3\;2\;1\;0}{1\;1\;0\;-_2} = \overset{8\;4\;2\;1}{1\;1\;0\;-_2}$$

(iv) $V = 1$. Pošto je $1 \geq 1$, možemo da oduzmemo 1 od V i na poziciji koja odgovara tom stepenu upisujemo 1.

$$\underset{3\;2\;1\;0}{1\;1\;0\;1_2} = \overset{8\;4\;2\;1}{1\;1\;0\;1_2}$$

Dakle, $\mathtt{D}_{16} = 1101_2$. Binarni zapis možemo da tumačimo dekadno na sledeći način: $13 = 8 + 4 + 0 + 1$, gde nulu pišemo umesto stepena 2. □

Na sličan način kao u primeru 3.7 možemo odrediti binarni zapis svih heksadekadnih cifara:

(3.1)

heksad. cifra	*binarni zapis*	*dekadno razlaganje*	*heksad. cifra*	*binarni zapis*	*dekadno razlaganje*
0_{16}	0000_2	$0+0+0+0$	8_{16}	1000_2	$8+0+0+0$
1_{16}	0001_2	$0+0+0+1$	9_{16}	1001_2	$8+0+0+1$
2_{16}	0010_2	$0+0+2+0$	$\mathtt{A}_{16}$	1010_2	$8+0+2+0$
3_{16}	0011_2	$0+0+2+1$	$\mathtt{B}_{16}$	1011_2	$8+0+2+1$
4_{16}	0100_2	$0+4+0+0$	$\mathtt{C}_{16}$	1100_2	$8+4+0+0$
5_{16}	0101_2	$0+4+0+1$	$\mathtt{D}_{16}$	1101_2	$8+4+0+1$
6_{16}	0110_2	$0+4+2+0$	$\mathtt{E}_{16}$	1110_2	$8+4+2+0$
7_{16}	0111_2	$0+4+2+1$	$\mathtt{F}_{16}$	1111_2	$8+4+2+1$

Kada je u pitanju zapis nula u pozicionom zapisu broju, važe ista pravila kao u dekadnom sistemu: nule na desnom kraju zapisa prirodnog broja su bitne i ne mogu se zanemariti (kao što u dekadnom 103 i 10300 nisu isti brojevi, tako i parovi 11_2 i 1100_2, odnosno $\mathtt{A3}_{16}$ i $\mathtt{A300}_{16}$, ne predstavljaju iste brojeve; 10300 je sto puta veći broj od 103, 1100_2 je 4 puta veći broj od 11_2, dok je $\mathtt{A300}_{16}$ 256 puta veći broj od $\mathtt{A3}_{16}$). S druge strane, nule koje se nalaze na početku zapisa broja (na levom kraju) nisu bitne i mogu se zanemariti (kao što su 205 i 00205 isti dekadni brojevi, tako su i 11_2 i 0011_2 jednaki binarni brojevi, a isto važi i za heksadekadne brojeve $\mathtt{B6}_{16}$ i $\mathtt{000B6}_{16}$). Međutim zapis svake heksadekadne cifre kao četvorocifrenog binarnog broja sa nulama na levom kraju u pojedinim slučajevima ima svoje prednosti kao što ćemo videti na sledećem predavanju.

4 Predavanje, 30. X

4.1 Pretvaranje brojeva iz jedne osnove u drugu pri čemu su obe različite od deset

U opštem slučaju, ako je potrebno da pretvorimo broj iz osnove n u osnovu m, pri čemu je $m \neq n$ i $m, n \neq 10$, na osnovu onog što smo do sada naučili, možemo problem svesti na dve konverzije koje znamo da uradimo:

(i) konverziju broja iz osnove n u dekadni sistem i

(ii) konverziju dobijene dekadne vrednosti broja u osnovu m.

Primer 4.1. Pretvoriti broj 234_7 u zapis u osnovi 5.

Rešenje. Problem rešavamo primenjujući opisane dve konverzije: najpre određujemo dekadnu vrednost broja 234_7 (što je isto što i pretvaranje u osnovu 10), a potom pretvaramo dobijeni broj iz dekadnog zapisa u zapis u osnovi 5:

(i) $234_7 = 2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 = (2 \cdot 7 + 3) \cdot 7 + 4 = 17 \cdot 7 + 4 = 119 + 4 = 123$

(ii) Koristeći celobrojno deljenje osnovom 5 i beleženjem uzastopnih količnika i ostataka dobijamo

123	24	4	0
3	4	4	

Dakle, $234_7 = 123 = 443_5$ □

Korišćenje dve konverzije umesto jedne direktnog postupka pretvaranja zapisa broja iz jedne osnove u drugu predstavlja očigledan nedostatak postupka opisanog u primeru 4.1. U opštem slučaja direktna konverzija je moguća pod uslovom da nam je poznato kako se deli brojem 5 u pozicionom sistemu sa osnovom 7, ali to nije slučaj pošto mi jedino znamo da računamo u dekadnom sistemu. Prema tome, u opštem slučaju ne raspolažemo tehnikom direktne konverzije jedne osnove u drugu, pri čemu su obe različite od deset. Da li rešenje postoji u nekim specijalnim slučajevima?

4.2 Pretvaranje brojeva iz jedne osnove u drugu pri čemu je neka od njih stepen one druge

Pretpostavimo da su n i m dve osnove različite od deset, ali takve da je jedna stepen druge, tj. postoji prirodan broj $k > 1$ takav da je $m = n^k$. U tom slučaju se može pokazati da se svaka cifra sistema sa većom osnovom ($m = n^k$) može predstaviti k-tocifrenim brojem (broj sa k cifara) u manjoj osnovi (n).

Primer 4.2. Već smo videli (tablica 3.1, str. 21) da svakoj cifri heksadekadnog sistema (dakle, osnove $16 = 2^4$) odgovara četvorocifreni binarni broj (broj u osnovi 2).

Slična situacija je i sa ciframa pozicionog sistema sa osnovom $4 = 2^2$ (*kvaternarni sistem*) i pozicionog sistema sa osnovom $8 = 2^3$ (*oktalni sistem*), tj. kvaternarnim ciframa

0–3 odgovaraju dvocifreni binarni brojevi, a oktalnim ciframa 0–7 odgovaraju trocifreni binarni brojevi (tablica 4.2).

(4.2)

kvaternarna cifra	*binarni zapis*	*dekadno razlaganje*	*oktalna cifra*	*binarni zapis*	*dekadno razlaganje*
0_4	00_2	$0+0$	0_8	000_2	$0+0+0$
1_4	01_2	$0+1$	1_8	001_2	$0+0+1$
2_4	10_2	$2+0$	2_8	010_2	$0+2+0$
3_4	11_2	$2+1$	3_8	011_2	$0+2+1$
			4_8	100_2	$4+0+0$
			5_8	101_2	$4+0+1$
			6_8	110_2	$4+2+0$
			7_8	111_2	$4+2+1$

□

U specijalnom slučaju kada je jedna osnova ($m = n^k$) stepen druge osnove n, direktna konverzija je moguća u oba smera, tj. iz veće osnove m u manju osnovu n i obrnuto, pri čemu se koristi pomenuto svojstvo da se cifre veće osnove mogu predstaviti kao k-tocifreni brojevi u manjoj osnovi.

Direktna konverzija iz osnove $m = n^k$ u osnovu n se obavlja zamenom svake cifre sistema sa osnovom m njenim k-tocifrenim zapisom u osnovi n.

Primer 4.3. Sledeće brojeve pretvoriti u binarni zapis ne pretvarajući ih u dekadni zapis: a) $\texttt{A9C3}_{16}$; b) 7165_8; c) 2213_4.

Rešenje. Prilikom rešavanja ovog zadatka možemo koristiti tablice 3.1 i 4.2, ali se treba navikavati da cifre prevodimo bez njih koristeći ranije objašnjeno dekadno razlaganje broja na zbir stepena broja 2 ($8+4+2+1$ za cifre osnove 16, $4+2+1$ za cifre osnove 8, $2+1$ za cifre osnove 4, pri čemu se svaki sabirak pojavljuje najviše jednom i uvek iz date cifre izvlačimo najveće moguće sabirke).

a) Svaku heksadekadnu cifru zamenjujemo četvorocifrenim binarnim brojem jer je veća osnova (16) četvrti stepen manje osnove (2):

$$\texttt{A}_{16} = 8+0+2+0 = 1010_2$$
$$9_{16} = 8+0+0+1 = 1001_2$$
$$\texttt{C}_{16} = 8+4+0+0 = 1100_2$$
$$3_{16} = 0+0+2+1 = 0011_2$$

$$\texttt{A9C3}_{16} = 1010\ 1001\ 1100\ 0011_2.$$

b) Svaku oktalnu cifru zamenjujemo trocifrenim binarnim brojem jer je veća osnova (8) treći stepen manje osnove (2):

$$7_8 = 4+2+1 = 111_2$$

$$
\begin{aligned}
1_8 &= 0 + 0 + 1 = 001_2 \\
6_8 &= 4 + 2 + 0 = 110_2 \\
5_8 &= 4 + 0 + 1 = 101_2
\end{aligned}
$$

$$
7165_8 = 111\ 001\ 110\ 101_2 = 1110\ 0111\ 0101_2.
$$

c) Svaku kvaternarnu cifru zamenjujemo dvocifrenim binarnim brojem jer je veća osnova (4) drugi stepen manje osnove (2):

$$
\begin{aligned}
2_4 &= 2 + 0 = 10_2 \\
1_4 &= 0 + 1 = 01_2 \\
3_4 &= 2 + 1 = 11_2
\end{aligned}
$$

$$
2213_4 = 10\ 10\ 01\ 11_2 = 1010\ 0111_2.
$$

Rešenja možemo proveriti primenom programa Calculator u okviru operativnog sistema Windows. Po pokretanju programa, potrebno je u meniju View izabrati opcije *Programmer* i *Digit grouping*. Opcija *Programmer* prebacuje kalkulator u režim koji omogućava rad sa dekadnim, binarnim, oktalnim i heksadekadnim brojevima, kao i njihovu međusobnu konverziju. Opcija *Digit grouping* poboljšava čitljivost brojeva tako što se cifre dele u grupe međusobno razdvojene razmakom (binarni, oktalni i heksadekadni brojevi), odnosno zapetom (dekadni sistem). U slučaju binarnog i heksadekadnog sistema opcija *Digit grouping* grupiše po četiri cifre zdesna nalevo, dok se kod oktalnih i dekadnih brojeva grupišu po tri cifre zdesna nalevo (Slika 4.5).

Pre unosa broja u Calculator-u koristeći zapis u određenoj osnovi treba izabrati odgovarajuću opciju koja odgovara toj osnovi (Hex: 16, Dec: 10, Oct: 8, Bin: 2), dok se konverzija vrši tako što se posle unosa broja izabere ciljna osnova (Slika 4.5). Podrazumevana osnova na početku rada je deset.

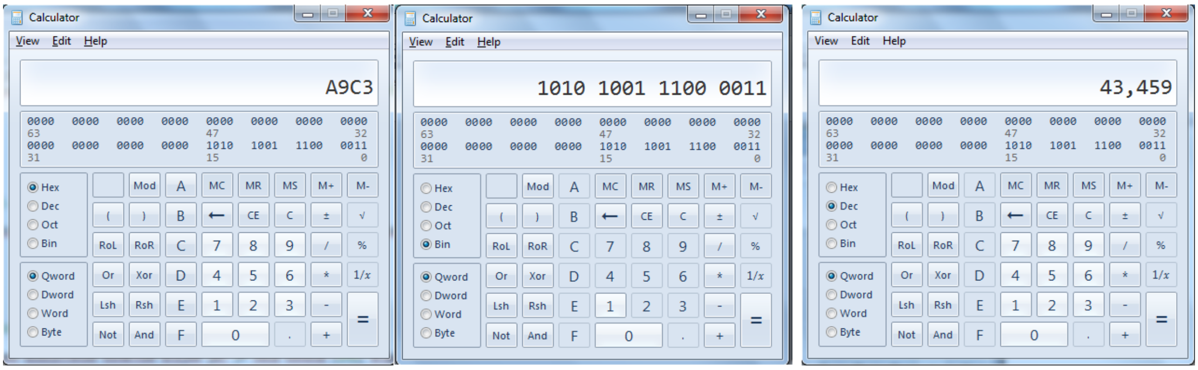
Pošto Calculator ne podržava kvaternarni pozicioni sistem, rešenje poslednjeg zadatka možemo proveriti kombinujući konverziju iz osnove 4 u dekadni sistem i konverziju iz dekadnog u binarni sistem (u poslednjem slučaju iskoristićemo Calculator).

$$
\begin{aligned}
2213_4 &= 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = ((2 \cdot 4 + 2) \cdot 4 + 1) \cdot 4 + 3 = \\
&= (10 \cdot 4 + 1) \cdot 4 + 3 = 41 \cdot 4 + 3 = 167 \quad \square
\end{aligned}
$$

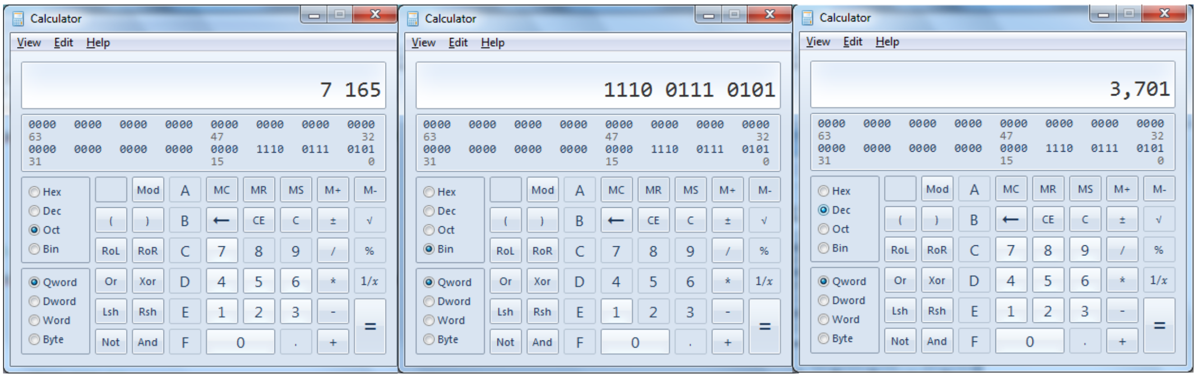
Direktna konverzija iz osnove n u osnovu $m = n^k$ se obavlja u dva koraka:

(i) cifre zapisa broja u osnovi n se grupišu zdesna nalevo tako da svaka grupa ima tačno k cifara (ako to nije slučaj sa prvom grupom sleva, ona se može dopuniti odgovarajućim brojem nula sa leve strane tako da se vrednost broja ne promeni);

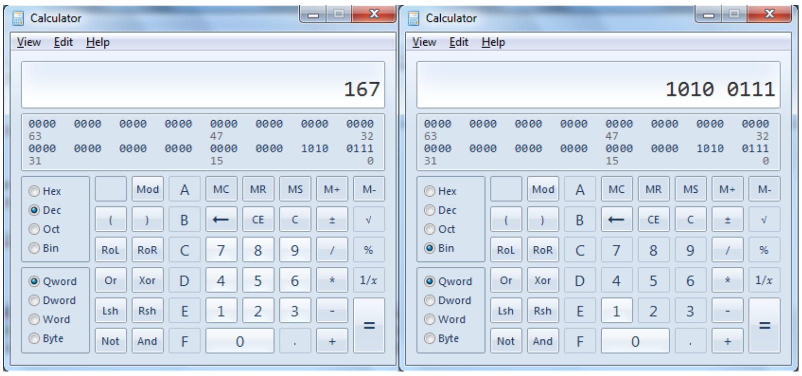
(ii) svaka dobijena grupa (k-tocifreni broj u osnovi n) se tretira kao zapis cifre sistema sa osnovom $m = n^k$ u osnovi n i zamenjuje se odgovarajućom cifrom u osnovi $m = n^k$.



(a) heksadekadni, binarni i dekadni sistem



(b) oktalni, binarni i dekadni sistem



(c) dekadni i binarni sistem

Slika 4.5: Režim za unos i konverziju brojeva u programu Calculator

Primer 4.4. Ne pretvarajući u dekadni sistem, binarni broj $1101\ 0110\ 1110\ 0011_2$ pretvoriti u zapis: a) u osnovi 16; b) u osnovi 8; c) u osnovi 4.

Rešenje. I prilikom rešavanja ovog zadatka možemo koristiti tablice 3.1 i 4.2, ali se one mogu izbeći tumačenjem četvorocifrenog, trocifrenog i dvocifrenog binarnog broja kao zbira odgovarajućih stepena broja 2 ($8 + 4 + 2 + 1$ za cifre osnove 16, $4 + 2 + 1$ za cifre osnove 8, $2 + 1$ za cifre osnove 4).

a) Najpre cifre zapisa datog broja u osnovi 2 grupišemo zdesna nalevo tako da svaka grupa ima tačno 4 binarne cifre (pošto je $16 = 2^4$. Radi lakše čitljivosti susedne grupe možemo razdvajati razmakom ili uspravnom crtom. U ovom primeru zadati broj je već podeljen razmakom na grupe od po četiri cifre zdesna nalevo. Ostaje da izračunamo dekadnu vrednost svake grupe binarnih cifara i zamenimo je odgovarajućom heksadekadnom cifrom:

$$\begin{aligned} 1101_2 &= 8 + 4 + 0 + 1 = \mathtt{D}_{16} \\ 0110_2 &= 0 + 4 + 2 + 0 = 6_{16} \\ 1110_2 &= 8 + 4 + 2 + 0 = \mathtt{E}_{16} \\ 0011_2 &= 0 + 0 + 2 + 1 = 3_{16} \end{aligned}$$

$$1101\ 0110\ 1110\ 0011_2 = \mathtt{D6E3}_{16}.$$

b) Najpre cifre zapisa datog broja u osnovi 2 grupišemo zdesna nalevo tako da svaka grupa ima tačno 3 binarne cifre (pošto je $8 = 2^3$):

$$\begin{aligned} 1101\ 0110\ 1110\ 0011_2 &= 1\ 101\ 011\ 011\ 100\ 011_2 \\ 1_2 &= 0 + 0 + 1 = 1_8 \\ 101_2 &= 4 + 0 + 1 = 5_8 \\ 011_2 &= 0 + 2 + 1 = 3_8 \\ 100_2 &= 4 + 0 + 0 = 4_8 \end{aligned}$$

$$1\ 101\ 011\ 011\ 100\ 011_2 = 153\ 343_8.$$

c) Najpre cifre zapisa datog broja u osnovi 2 grupišemo zdesna nalevo tako da svaka grupa ima tačno 2 binarne cifre (pošto je $4 = 2^2$):

$$\begin{aligned} 1101\ 0110\ 1110\ 0011_2 &= 11\ 01\ 01\ 10\ 11\ 10\ 00\ 11_2 \\ 11_2 &= 2 + 1 = 3_4 \\ 01_2 &= 0 + 1 = 1_4 \\ 10_2 &= 2 + 0 = 2_4 \\ 00_2 &= 0 + 0 = 0_4 \end{aligned}$$

$$11\ 01\ 01\ 10\ 11\ 10\ 00\ 11_2 = 31\ 123\ 203_4. \quad \square$$

Domaći zadatak 4.1. Ne pretvarajući brojeve u dekadni zapis i koristeći binarni sistem kao prelazni sistem, dvostrukom brzom konverzijom pretvoriti brojeve:

a) $\texttt{15B7}_{16}$ u osnove 4 i 8;

b) 634_8 u osnove 4 i 16;

c) $1001\ 1111\ 0110_2$ u osnove 8 i 16;

Rešenje. Evo rešenja samo za pretvaranje broja $\texttt{15B7}_{16}$ u osnovu 8. Primenićemo direktnu konverziju iz osnove 16 u osnovu 2, a potom direktnu konverziju iz osnove 2 u osnovu 8.

$$\begin{aligned} \texttt{15B7}_{16} &= 0001\ 0101\ 1011\ 0111_2 = 1\ 0101\ 1011\ 0111_2 = \\ &= 1\ 010\ 110\ 110\ 111_2 = 12\ 667_8 \quad \square \end{aligned}$$

5 Predavanje, 6. XI

Za razliku od nepozicionih brojnih sistema (poput rimskih brojeva), osnovne računske radnje (sabiranje, oduzimanje, množenje i celobrojno deljenje) se izvode po relativno jednostavnim pravilima u pozicionom sistemu sa proizvoljnom osnovom. Štaviše, pravila računskih radnji su faktički ista bez obzira o kojoj osnovi pozicionog sistema se radi, jedino treba voditi računa o tome koju osnovu koristimo u datom trenutku i kako izgledaju cifre u toj osnovi. Pokazaćemo da nije potrebno pretvarati brojeve u dekadni sistem kako bi se nad njima obavile osnovne računske radnje, a samim nema potrebe ni za konverzijom rezultata u polaznu osnovu. Posebno ćemo se osvrnuti na računske radnje u binarnom i heksadekadnom sistemu.

5.1 Sabiranje u pozicionom sistemu sa proizvoljnom osnovom

U primerima (5.1)–(5.3) uporedićemo sabiranje u dekadnom, heksadekadnom i binarnom sistemu.

Primer 5.1. Podsetimo se najpre kako izgleda sabiranje u dekadnom sistemu koje svakodnevno koristimo na primeru zbira prirodnih brojeva 145 i 83.

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ & 1 & 4 & 5 \\ + & & 8 & 3 \\ \hline & & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & & \\ & 1 & 4 & 5 \\ + & & 8 & 3 \\ \hline & & & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 1} & & \\ & 1 & 4 & 5 \\ + & & 8 & 3 \\ \hline & & 2 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 1} & & \\ & 1 & 4 & 5 \\ + & & 8 & 3 \\ \hline & 2 & 2 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 1} & & \\ & 1 & 4 & 5 \\ + & & 8 & 3 \\ \hline & 2 & 2 & 8 \end{array}$$

(i) Radi jednostavnijeg računanja sabirke i zbir navodimo jedan ispod drugog pri čemu se brojevi poravnavaju zdesna nalevo tako da jedna ispod druge budu cifre na istim pozicijama (tačnije, cifre na pozicijama koje odgovaraju istim stepenima broja deset).

Sabiranje se odvija tako što se sabiraju cifre sabiraka na istoj poziciji u redosledu zdesna nalevo i rezultat svakog sabiranja cifara se ispisuje kao cifra na odgovarajućoj poziciji rezultata. Dakle, cifra jedinica prvog sabirka se sabira sa cifrom jedinica drugog sabirka i rezultat se upisuje na poziciji cifre jedinica zbira, cifra desetica prvog sabirka se sabira sa cifrom desetica drugog sabirka i rezultat se upisuje na poziciji cifre desetica zbira i postupak se ponavlja za sve ostale parove cifara sabiraka koji odgovaraju istim stepenima broja deset (stotine, hiljade itd).

(ii) Ako je zbir dve cifre manji od osnove (deset), taj zbir se upisuje na odgovarajućoj poziciji. U datom primeru zbir cifara jedinica je $5 + 3 = 8 < 10$ i upisuje se na poziciji koja odgovara jedinicama u rezultatu.

(iii) Međutim, ako je zbir dve cifre dostigao broj deset ili ga premašio, tada se taj zbir ne može zapisati na odgovarajućem mestu jer više nije jednocifren broj. Štaviše, u tom slučaju zbir cifara odgovara zbiru različitih stepena osnove (deset):

- stepena koji odgovara poziciji na kojoj se nalaze cifre koje sabiramo i
- stepena koji odgovara prvoj narednoj poziciji sa leve strane.

U datom primeru, zbir cifara na poziciji desetica je $4 + 8 = 12 = 10 + 2$, što zapravo znači da smo sabiranjem četiri desetice i osam desetica dobili dvanaest desetica, odnosno jednu stotinu (deset desetica) i dve desetice. Poštujući pravilo da se sabiraju samo stepeni osnove (deset) istih izložioca (jedinice sa jedinicama, desetice sa deseticama, stotine sa stotinama), dobijenu stotinu prenosimo u kolonu koja odgovara stotinama, a na poziciji desetica beležimo kao rezultat dve desetice. Primetimo da smo preneli broj deset sa pozicije desetica na poziciju stotina kao broj 1 zato što deset desetica vrede kao jedna stotina. Ovo pravilo da se deset prenosi na poziciju sa leve strane kao broj 1 će važiti za bilo koju poziciju u dekadnom zapisu zato što za dve susedne pozicije u dekadnom zapisu uvek važi da levoj poziciji odgovara stepen čiji je izložilac za jedan veći od izložioca stepena broja deset na desnoj poziciji, pa pozicija sa leve strane vredi deset puta više od pozicije sa desne strane.

Navedeno pravilo prenosa možemo da formulišemo i ovako: ako je zbir cifara dostigao ili premašio osnovu (u ovom slučaju broj deset), za svaku pojedinačnu pojavu osnove u zbiru cifara prenosimo po jednu jedinicu na sledeću poziciju sa leve strane gde će učestvovati u zbiru cifara kao jedan od sabiraka. Drugim rečima, *prenos* na sledeću poziciju sa leve strane je količnik pri celobrojnom deljenju zbira cifara na trenutnoj pozicija osnovom (brojem deset u ovom slučaju). Rezultat koji beležimo na trenutnoj poziciji predstavlja ostatak pri celobrojnom deljenju osnovom, odnosno ono što preostane kada od zbira cifara oduzmemo sva pojavljivanja osnove u zbiru.

U slučaju kada sabiramo dva broja, prenos može biti najviše jedan (zbir dve najviše cifre je uvek manji od dvostruke osnove, na primer $9 + 9 = 18 = 2 \cdot 9 < 2 \cdot 10$), dok u slučaju da istovremeno sabiramo više od dva broja, prenos može biti i veći od jedan.

Primetimo da prethodno opisani postupak sabiranja brojeva 145 i 83 je zapravo kompaktniji zapis sledećeg postupka:

$$
\begin{aligned}
145 + 83 &= (5 + 40 + 100) + (3 + 80 + 0) = (5 + 3) + (40 + 80) + (100 + 0) = \\
&= 8 + (40 + 80) + (100 + 0) = 8 + (100 + 20) + (100 + 0) = \\
&= 8 + 20 + (100 + 100 + 0) = 8 + 20 + 200 = 228 \quad \square
\end{aligned}
$$

Primer 5.2. U slučaju kada sabiramo dva heksadekadna broja postupamo po istim pravilima kao u primeru 5.1, pri čemu sada moramo voditi računa da je osnova broj šesnaest, a ne broj deset.

$$
\begin{array}{r} \\ \texttt{B3F4}_{16} \\ +\ \ \texttt{E57}_{16} \\ \hline \\ \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} \\ \texttt{B3F4}_{16} \\ +\ \ \texttt{E57}_{16} \\ \hline \texttt{B}_{16} \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} \texttt{1}\phantom{\texttt{F4}_{16}} \\ \texttt{B3F4}_{16} \\ +\ \ \texttt{E57}_{16} \\ \hline \texttt{4B}_{16} \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} \texttt{11}\phantom{\texttt{F4}_{16}} \\ \texttt{B3F4}_{16} \\ +\ \ \texttt{E57}_{16} \\ \hline \texttt{24B}_{16} \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} \texttt{11}\phantom{\texttt{F4}_{16}} \\ \texttt{B3F4}_{16} \\ +\ \ \texttt{E57}_{16} \\ \hline \texttt{C24B}_{16} \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} \texttt{11}\phantom{\texttt{F4}_{16}} \\ \texttt{B3F4}_{16} \\ +\ \ \texttt{E57}_{16} \\ \hline \texttt{C24B}_{16} \end{array}
$$

(i) Prva pravilo je potpuno isto kao u primeru 5.1 sa napomenom da se sada ne sabiraju desetice, stotine i hiljade već stepeni broja šesnaest.

(ii) Ako je zbir dve cifre manji od osnove (šesnaest), taj zbir se upisuje na odgovarajućoj poziciji. U datom primeru zbir cifara jedinica je $4_{16} + 7_{16} = 4 + 7 = 11 = \texttt{B}_{16} < 10_{16} = 16$ i `B` upisujemo na poziciji koja odgovara jedinicama u rezultatu.

(iii) Ako je zbir cifara dostigao ili premašio osnovu (u ovom slučaju broj šesnaest), za svaku pojedinačnu pojavu osnove u zbiru cifara prenosimo po jednu jedinicu na sledeću poziciju sa leve strane gde će učestvovati u zbiru cifara kao jedan od sabiraka. Drugim rečima, *prenos* na sledeću poziciju sa leve strane je količnik pri celobrojnom deljenju zbira cifara na trenutnoj pozicija osnovom (brojem šesnaest u ovom slučaju). Rezultat koji beležimo na trenutnoj poziciji predstavlja ostatak pri celobrojnom deljenju osnovom, odnosno ono što preostane kada od zbira cifara oduzmemo sva pojavljivanja osnove u zbiru.

U datom primeru, na poziciji koja odgovara izložiocu 1 (druga pozicija zdesna), zbir cifara je $\texttt{F}_{16} + 5_{16} = 15 + 5 = 20 = 16 + 4 = 14_{16}$, pa kao rezultat upisujemo 4 i imamo prenos 1 na sledeću poziciju sa leve strane.

Na trećoj poziciji zdesna koja odgovara izložiocu 2 zbir prenosa i cifara je $1_{16} + 3_{16} + \texttt{E}_{16} = 1 + 3 + 14 = 18 = 16 + 2 = 12_{16}$, pa kao rezultat upisujemo 2 i imamo prenos 1 na sledeću poziciju sa leve strane.

Na kraju, na poziciji koja odgovara izložiocu 3 (četvrta pozicija zdesna) zbir prenosa i cifara je $1_{16} + \texttt{B}_{16} + 0_{16} = 1 + 11 + 0 = 12 = \texttt{C}_{16}$, pa kao rezultat upisujemo `C`, nema prenosa na sledeću poziciju i sabiranje je završeno. $\square$

U zadacima koji se odnose na računske radnje u heksadekadnom i binarnom sistemu neprekidno će se ponavljati tekst „ne pretvarajući u dekadni brojni sistem”. Smisao tog teksta je da spreči da se brojevi nad kojima treba obaviti određenu računsku radnju najpre pretvore iz osnove koja nije 10 u dekadni sistem, kako bi se rezultat izračunao u dekadnom sistemu i potom pretvorio nazad u polaznu osnovu. Primetimo da smo u primeru 5.2 ipak napravili „izlet” u dekadni sistem, ali samo radi sabiranja cifara. Dekadni sistem nam ne bi bio potreban kada bismo znali napamet tablicu sabiranja cifara za heksadekadni sistem, tj. heksadekadni zbir svih parova heksadekadnih cifara (Tabela 5.5).

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10_{16}
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10_{16}	11_{16}
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10_{16}	11_{16}	12_{16}
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10_{16}	11_{16}	12_{16}	13_{16}
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10_{16}	11_{16}	12_{16}	13_{16}	14_{16}
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10_{16}	11_{16}	12_{16}	13_{16}	14_{16}	15_{16}
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10_{16}	11_{16}	12_{16}	13_{16}	14_{16}	15_{16}	16_{16}
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10_{16}	11_{16}	12_{16}	13_{16}	14_{16}	15_{16}	16_{16}	17_{16}
9	9	A	B	C	D	E	F	10_{16}	11_{16}	12_{16}	13_{16}	14_{16}	15_{16}	16_{16}	17_{16}	18_{16}
A	A	B	C	D	E	F	10_{16}	11_{16}	12_{16}	13_{16}	14_{16}	15_{16}	16_{16}	17_{16}	18_{16}	19_{16}
B	B	C	D	E	F	10_{16}	11_{16}	12_{16}	13_{16}	14_{16}	15_{16}	16_{16}	17_{16}	18_{16}	19_{16}	$1A_{16}$
C	C	D	E	F	10_{16}	11_{16}	12_{16}	13_{16}	14_{16}	15_{16}	16_{16}	17_{16}	18_{16}	19_{16}	$1A_{16}$	$1B_{16}$
D	D	E	F	10_{16}	11_{16}	12_{16}	13_{16}	14_{16}	15_{16}	16_{16}	17_{16}	18_{16}	19_{16}	$1A_{16}$	$1B_{16}$	$1C_{16}$
E	E	F	10_{16}	11_{16}	12_{16}	13_{16}	14_{16}	15_{16}	16_{16}	17_{16}	18_{16}	19_{16}	$1A_{16}$	$1B_{16}$	$1C_{16}$	$1D_{16}$
F	F	10_{16}	11_{16}	12_{16}	13_{16}	14_{16}	15_{16}	16_{16}	17_{16}	18_{16}	19_{16}	$1A_{16}$	$1B_{16}$	$1C_{16}$	$1D_{16}$	$1E_{16}$

Tabela 5.5: Tablica sabiranja heksadekadnih cifara (bez prenosa kao trećeg sabirka)

S obzirom da bismo morali da pamtimo bar 256 zbirova parova heksadekadnih cifara (zapravo samo 128 jer zbir ne zavisi od redosleda sabiraka), a u slučaju da uzmemo u obzir i prenos prilikom sabiranja, jasno je da je tablica sabiranja heksadekadnih cifara (Tabela 5.5) nepraktična za rad i mnogo je efikasnije privremeno preći u dekadni sistem kada je potrebno sabrati heksadekadne cifre. Na taj način izbegavamo konverzije sabiraka iz osnove 16 u dekadni sistem i nazad u polaznu osnovu 16, već dekadni sistem koristimo samo kada moramo, tj. kada je potrebno sabrati dve heksadekadne cifre. Na kraju krajeva, jedino u dekadnom sistemu znamo kako izgleda tablica sabiranja i ovo je jedini način ako želimoda izbegnemo pamćenje tablice sabiranja u heksadekadnom sistemu.

U odnosu na tablicu sabiranja u heksadekadnom sistemu, tablica sabiranja cifara u binarnom brojnom sistemu je daleko jednostavnija i lako se pamti jer sistem ima samo dve cifre, a kada sabiramo dve binarne cifre, najveći mogući prenos je 1:

$cifra$	$cifra$	$prenos$	$zbir$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	10_2
1	0	0	1
1	0	1	10_2
1	1	0	10_2
1	1	1	11_2

Primer 5.3. I u slučaju kada sabiramo dva binarna broja postupamo po istim pravilima kao u primeru 5.1, s tim što sada moramo da vodimo računa da je osnova broj dva, a ne broj deset.

$$\begin{array}{r} 1001\;0100_2 \\ +\;\;101\;1110_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001\;0100_2 \\ +\;\;101\;1110_2 \\ \hline 0_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001\;0100_2 \\ +\;\;101\;1110_2 \\ \hline 10_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 1001\;0100_2 \\ +\;\;101\;1110_2 \\ \hline 010_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1\;\;1} \\ 1001\;0100_2 \\ +\;\;101\;1110_2 \\ \hline 0010_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 1001\;0100_2 \\ +\;\;101\;1110_2 \\ \hline 1\;0010_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 1001\;0100_2 \\ +\;\;101\;1110_2 \\ \hline 11\;0010_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001\;0100_2 \\ +\;\;101\;1110_2 \\ \hline 111\;0010_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001\;0100_2 \\ +\;\;101\;1110_2 \\ \hline 1111\;0010_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001\;0100_2 \\ +\;\;101\;1110_2 \\ \hline 1111\;0010_2 \end{array}$$

(i) Prva pravilo je potpuno isto kao u primeru 5.1 sa napomenom da se sada ne sabiraju desetice, stotine i hiljade već stepeni broja dva (jedinice, dvojke, četvorke, itd.).

(ii) Ako je zbir dve cifre manji od osnove (dva), taj zbir se upisuje na odgovarajućoj poziciji. U datom primeru zbir cifara jedinica je $0_2 + 0_2 = 0 + 0 = 0 = 0_2 < 10_2 = 2$ i 0 upisujemo na poziciji koja odgovara jedinicama u rezultatu.

U datom primeru, na poziciji koja odgovara izložiocu 1 (druga pozicija zdesna), imamo sličnu situaciju, tj. zbir cifara je $0_2 + 1_2 = 0 + 1 = 1 = 1_2 < 10_2 = 2$ i 1 upisujemo na poziciji koja odgovara rezultatu na tekućoj poziciji.

(iii) Ako je zbir cifara dostigao ili premašio osnovu (u ovom slučaju broj dva), za svaku pojedinačnu pojavu osnove u zbiru cifara prenosimo po jednu jedinicu na sledeću poziciju sa leve strane gde će učestvovati u zbiru cifara kao jedan od sabiraka.

U datom primeru, na poziciji koja odgovara izložiocu 2 (treća pozicija zdesna), zbir cifara je $1_2 + 1_2 = 1 + 1 = 2 = 2 + 0 = 10_2$, pa kao rezultat upisujemo 0 i imamo prenos 1 na sledeću poziciju sa leve strane.

Na poziciji koja odgovara izložiocu 3 (četvrta pozicija zdesna) zbir prenosa i cifara je isti kao na prethodnoj poziciji $1_2 + 0_2 + 1_0 = 10_2$, pa kao rezultat ponovo upisujemo 0 i imamo prenos 1 na sledeću poziciju sa leve strane.

Na poziciji koja odgovara izložiocu 4 (četvrta pozicija sleva) zbir prenosa i cifara je $1_2 + 1_2 + 1_0 = 3 = 2 + 1 = 11_2$, pa kao rezultat upisujemo 1 i imamo prenos 1 na sledeću poziciju sa leve strane.

Na poziciji koja odgovara izložiocu 5 (treća pozicija sleva) zbir prenosa i cifara je $1_2 + 0_2 + 0_0 = 1_2$, pa kao rezultat upisujemo 1 i nema prenosa na sledeću poziciju sa leve strane.

Na poziciji koja odgovara izložiocu 6 (druga pozicija sleva) zbir cifara je $0_2 + 1_0 = 1_2$, pa kao rezultat upisujemo 1 i nema prenosa na sledeću poziciju sa leve strane.

Na kraju, na poziciji koja odgovara izložiocu 7 (prva pozicija sleva) zbir cifara je $1_2 + 0_0 = 1_2$, pa kao rezultat upisujemo 1, nema prenosa na sledeću poziciju i sabiranje je završeno. □

Rezultat možemo proveriti brzim prebacivanjem u osnovu 16 i ujedno vežbanjem sabiranja u heksadekadnom sistemu:

$$
\begin{array}{r} \\ 1001\,0100_2 \\ +\ \ 101\,1110_2 \\ \hline \\ \end{array}
\quad
\begin{array}{r} \\ 94_{16} \\ +5E_{16} \\ \hline \\ \end{array}
\quad
\begin{array}{r} {}^{1}\phantom{4_{16}} \\ 94_{16} \\ +5E_{16} \\ \hline 2_{16} \end{array}
\quad
\begin{array}{r} {}^{1}\phantom{4_{16}} \\ 94_{16} \\ +5E_{16} \\ \hline F2_{16} \end{array}
\quad
\begin{array}{r} \\ 94_{16} \\ +5E_{16} \\ \hline F2_{16} \end{array}
\quad
\begin{array}{r} \\ 1001\,0100_2 \\ +\ \ 101\,1110_2 \\ \hline 1111\,0010_2 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
(1001_2 = 8+0+0+1 = 8+1 = 9_{16}, & 0100_2 = 4 = 4_{16}, \\
101_2 = 0+4+0+1 = 5_{16}, & 1110_2 = 8+4+2+0 = 14 = E_{16}, \\
F_{16} = 15 = 8+4+2+1 = 1111_2, & 2_{16} = 0+0+2+0 = 0010_2.) \quad \square
\end{array}
$$

Proveru rezultata sabiranja u binarnom i heksadekadnom sistemu možemo obaviti i u već pomenutom programu Calculator u okviru operativnog sistema Windows (v. str. 24).

Domaći zadatak 5.1. Heksadekadne brojeve iz primera 5.2 prebaciti u binarni sistem, sabrati odgovarajuće binarne brojeve i dobijeni rezultat ponovo pretvoriti u heksadekadni zapis. Uporediti da li se dobija isti rezultat u heksadekadnom i binarnom sistemu.

5.2 Oduzimanje u pozicionom sistemu sa proizvoljnom osnovom

U primerima (5.4)–(5.6) uporedićemo oduzimanje u dekadnom, heksadekadnom i binarnom sistemu.

Primer 5.4. Podsetimo se najpre kako izgleda oduzimanje u dekadnom sistemu na primeru razlike dva para prirodnih brojeva: 145 i 83, odnosno 2006 i 49.

U slučaju prvog para, 145 i 83, oduzimanje se obavlja na sledeći način:

$$
\begin{array}{r} \\ 1\,4\,5 \\ -\quad 8\,3 \\ \hline \\ \end{array}
\quad
\begin{array}{r} \\ 1\,4\,5 \\ -\quad 8\,3 \\ \hline 2 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} \frown \\ 1\,4\,5 \\ -\quad 8\,3 \\ \hline 2 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} {}^{0}\phantom{{}^{1}4\,5} \\ \cancel{1}\,{}^{1}4\,5 \\ -\quad 8\,3 \\ \hline 6\,2 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} {}^{0}\phantom{{}^{1}4\,5} \\ \cancel{1}\,{}^{1}4\,5 \\ -\quad 8\,3 \\ \hline 6\,2 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} {}^{0}\phantom{{}^{1}4\,5} \\ \cancel{1}\,{}^{1}4\,5 \\ -\quad 8\,3 \\ \hline 6\,2 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} \\ 1\,4\,5 \\ -\quad 8\,3 \\ \hline 6\,2 \end{array}
$$

(i) Radi jednostavnijeg računanja broj od koga oduzimamo (umanjenik) i broj koji oduzimamo (umanjilac), kao i rezultat oduzimanja (razlika), navode se jedan ispod drugog i poravnati zdesna nalevo tako da jedna ispod druge budu cifre na istim pozicijama (tačnije, cifre na pozicijama koje odgovaraju istim stepenima osnove, u ovom slučaju stepenima broja deset).

   Oduzimanje brojeva se realizuje kao oduzimanje cifara umanjenika i umanjioca na svakoj poziciji posebno, u redosledu zdesna nalevo, a rezultat svakog oduzimanja cifara se ispisuje na odgovarajućoj poziciji rezultata. U ovom slučaju, pošto je osnova broj deset, cifra jedinica umanjioca se oduzima od cifre jedinica umanjenika i rezultat se upisuje na poziciji cifre jedinica razlike, cifra desetica umanjioca se oduzima od cifre desetica umanjenika i rezultat se upisuje na poziciji cifre desetica razlike i postupak se ponavlja za ostale parove cifara umanjioca i umanjenika koji odgovaraju istim stepenima osnove, tj. broja deset (stotine, hiljade itd).

(ii) Ako je cifra umanjenika veća od cifre umanjioca ili su te cifre jednake, njihova razlika je prirodan broj (uključujući i nulu) i dekadna cifra koja se upisuje na odgovarajućoj poziciji rezultata. U datom primeru razlika cifara jedinica je $5-3=2$ i upisuje se na poziciji koja odgovara jedinicama u rezultatu.

(iii) Međutim, ako je cifra umanjenika manja od odgovarajuće cifre umanjioca, kao što je to slučaj sa ciframa deseticama u datom primeru ($4 < 8$), direktno oduzimanje cifara nije moguće u skupu prirodnih brojeva ($4 - 8$ nije prirodan broj). U takvom slučaju je potrebno modifikovati zapis umanjenika, tj. drugačije predstaviti umanjenik kao zbir stepena osnove:

$$\begin{aligned}145 - 83 &= (5 + 40 + 100) - (3 + 80 + 0) = (5 - 3) + (40 - 80) + (100 - 0) = \\ &= 2 + (40 - 80) + (100 - 0) = 2 + (100 + 40 - 80) + (0 - 0) = \\ &= 2 + (140 - 80) + (0 - 0) = 2 + 60 + (0 - 0) = 2 + 60 + 0 = 62\end{aligned}$$

   Oduzimanje cifara na poziciji desetica je obavljeno pozajmicom jedne stotine sa susedne leve pozicije umanjenika. Pozajmicu zapisujemo sitnim fontom sa leve strane tekuće pozicije čime naglašavamo da je njena vrednost na tekućoj poziciji deset puta veća (jer jedna stotina vredi deset desetica). S obzirom na pozajmicu, cifra umanjenika na poziciji stotina (1) se smanjuje za 1 i postaje 0 (stara vrednost se precrtava, a iznad nje se navodi nova vrednost), dok se cifra umanjenika na poziciji desetica (4) uvećava za deset (ponovo: jer jedna stotina vredi deset desetica), te se na poziciji desetica nalazi ukupno $10 + 4 = 14$ desetica od kojih možemo da oduzmemo 8 desetica umanjioca i upišemo kao rezultat 6 (desetica) na odgovarajućoj poziciji razlike.

   U sledećem koraku faktički nema cifre stotina ni kod umanjenika, ni kod umanjioca (obe su jednake nuli), pa je oduzimanje završeno i rezultat (razlika) je 62.

U slučaju drugog para brojeva, 2006 i 49, oduzimanje se obavlja na sličan način, ali su pravila pozajmice složenija:

$$\begin{array}{r} \\ 2\,0\,0\,6 \\ -\quad 4\,9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ 2\,0\,0\,6 \\ -\quad 4\,9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\phantom{{}^1 0\,0\,6} \\ \cancel{2}\,{}^1 0\,0\,6 \\ -\quad 4\,9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\;\,9\phantom{{}^1 0\,6} \\ \cancel{2}\,{}^1\cancel{0}\,{}^1 0\,6 \\ -\quad 4\,9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\;\,9\;\,9\phantom{{}^1 6} \\ \cancel{2}\,{}^1\cancel{0}\,{}^1\cancel{0}\,{}^1 6 \\ -\quad 4\;\,9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\;\,9\;\,9\phantom{{}^1 6} \\ \cancel{2}\,{}^1\cancel{0}\,{}^1\cancel{0}\,{}^1 6 \\ -\quad 4\;\,9 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\;\,9\;\,9\phantom{{}^1 6} \\ \cancel{2}\,{}^1\cancel{0}\,{}^1\cancel{0}\,{}^1 6 \\ -\quad 4\;\,9 \\ \hline 5\;\,7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\;\,9\;\,9\phantom{{}^1 6} \\ \cancel{2}\,{}^1\cancel{0}\,{}^1\cancel{0}\,{}^1 6 \\ -\quad 4\;\,9 \\ \hline 9\;\,5\;\,7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\;\,9\;\,9\phantom{{}^1 6} \\ \cancel{2}\,{}^1\cancel{0}\,{}^1\cancel{0}\,{}^1 6 \\ -\quad 4\;\,9 \\ \hline 1\;\,9\;\,5\;\,7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\;\,9\;\,9\phantom{{}^1 6} \\ \cancel{2}\,{}^1\cancel{0}\,{}^1\cancel{0}\,{}^1 6 \\ -\quad 4\;\,9 \\ \hline 1\;\,9\;\,5\;\,7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,0\,0\,6 \\ -\quad 4\,9 \\ \hline 1\,9\,5\,7 \end{array}$$

Na osnovu dva izložena primera dekadnog oduzimanja pravilo pozajmice možemo formulisati na sledeći način:

- Ako je na nekoj poziciji cifra umanjenika manja od cifre umanjioca, pristupa se pozajmici sa susedne leve pozicije umanjenika.

- U ovom primeru je osnova pozicionog sistema deset, u opštem slučaju je osnova neki prirodan broj n. Pošto susedna leva pozicija tekuće pozicije odgovara stepenu osnove čiji je izložilac za 1 veći od izložioca stepena osnove koji odgovara tekućoj poziciji, sledi da 1 na susednoj levoj poziciji vredi n puta više kada se pozajmi tekućoj poziciji. U dekadnom sistemu, kada pozajmimo jednu deseticu sa susedne leve poziciji, na tekućpj poziciji ona vredi deset jedinica; kada pozajmimo jednu stotinu sa susedne leve poziciji, na tekućoj poziciji ona vredi deset desetica; kada pozajmimo jednu hiljadu sa susedne leve poziciji, na tekućpj poziciji ona vredi deset stotina itd. Dakle, u dekadnom sistemu pozajmljena cifra 1 sa susedne leve pozicije uvek vredi deset na tekućoj poziciji.

  U opštem slučaju ako u sistemu sa osnovom n pozajmimo neki stepen osnove n sa susedne leve pozicije, na tekućoj poziciji će taj stepen vredeti n puta više nego stepen koji odgovara tekućoj poziciji, pa će pozajmljena cifra 1 sa susedne leve pozicije vredeti n na tekućoj poziciji.

- Pozajmica sa susedne leve pozicije je moguća isključivo ako je tamošnja cifra različita od nule. U protivnom, susedna leva pozicija mora takođe da obavi pozajmicu od svoje susedne leve pozicije i taj postupak se ponavlja sve dok se ne naiđe na prvu cifru koja je različita od nule, tj. imamo lanac pozajmica. Cifra koja je tokom lančane pozajmice pronađena kao prva cifra različita od nule, smanjuje se za 1, a onda se obrnutim redosledom realizuju lančane pozajmice njenim desnim susedima sve dok se ne dođe do pozicije koja je započela lančanu pozajmicu. Cifre jednake nuli od kojih se pozajmljuje, najpre se svojom pozajmicom uvećavaju za osnovu (u dekadnom sistemu za deset), a potom smanjuju za 1 kako bi pozajmile svog desnog suseda, te posle završetka lančane pozajmice imaju vrednost jednaku najvećoj cifri pozicionog sistema (cifri 9 u dekadnom sistemu). $\square$

Primer 5.5. U slučaju kada oduzimamo jedan heksadekadni broj od drugog, postupamo po istim pravilima kao u primeru 5.4, pri čemu sada moramo voditi računa da je osnova broj šesnaest, a ne broj deset. To znači da kada god dve pozicije razmene pozajmicu, pozajmljena cifra 1 sa susedne leve pozicije vredi šesnaest (10_{16}) na tekućoj poziciji jer je osnova u kojoj računamo jednaka šesnaest.

Heksadekadno oduzimanje objasnićemo na primeru oduzimanja dva para brojeva (u zapisu prenosa izostavićemo osnovu radi jednostavnosti, osim kada je potrebno naglasiti da je broj heksadekadni, na primer 18_{16}).

Neka je prvi par brojeva čiju razliku treba izračunati $\mathtt{19B0}_{16}$ i $\mathtt{FD4}_{16}$:

$$
\begin{array}{rr} & \mathtt{19B0}_{16} \\ - & \mathtt{FD4}_{16} \\ \hline & \end{array}
\qquad
\begin{array}{rr} & \mathtt{19B0} \\ - & \mathtt{FD4} \\ \hline & \end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc} & & & \mathtt{A} & \\ & \mathtt{1} & \mathtt{9} & \cancel{\mathtt{B}} & \mathtt{10} \\ - & & \mathtt{F} & \mathtt{D} & \mathtt{4} \\ \hline & & & & \mathtt{C} \end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc} & & & \mathtt{A} & \\ & \mathtt{1} & \mathtt{9} & \cancel{\mathtt{B}} & \mathtt{10} \\ - & & \mathtt{F} & \mathtt{D} & \mathtt{4} \\ \hline & & & & \mathtt{C} \end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc} & & \mathtt{8} & \mathtt{1A} & \\ & \mathtt{1} & \cancel{\mathtt{9}} & \cancel{\mathtt{B}} & \mathtt{10} \\ - & & \mathtt{F} & \mathtt{D} & \mathtt{4} \\ \hline & & & \mathtt{D} & \mathtt{C} \end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccc} & & \mathtt{8} & \mathtt{1A} & \\ & \mathtt{1} & \cancel{\mathtt{9}} & \cancel{\mathtt{B}} & \mathtt{10} \\ - & & \mathtt{F} & \mathtt{D} & \mathtt{4} \\ \hline & & & \mathtt{D} & \mathtt{C} \end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc} & \mathtt{0} & \mathtt{18}_{16} & \mathtt{1A} & \\ & \cancel{\mathtt{1}} & \cancel{\mathtt{9}} & \cancel{\mathtt{B}} & \mathtt{10} \\ - & & \mathtt{F} & \mathtt{D} & \mathtt{4} \\ \hline & & \mathtt{9} & \mathtt{D} & \mathtt{C} \end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc} & \mathtt{0} & \mathtt{18}_{16} & \mathtt{1A} & \\ & \cancel{\mathtt{1}} & \cancel{\mathtt{9}} & \cancel{\mathtt{B}} & \mathtt{10} \\ - & & \mathtt{F} & \mathtt{D} & \mathtt{4} \\ \hline & & \mathtt{9} & \mathtt{D} & \mathtt{C} \end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc} & \mathtt{0} & \mathtt{18}_{16} & \mathtt{1A} & \\ & \cancel{\mathtt{1}} & \cancel{\mathtt{9}} & \cancel{\mathtt{B}} & \mathtt{10} \\ - & & \mathtt{F} & \mathtt{D} & \mathtt{4} \\ \hline & & \mathtt{9} & \mathtt{D} & \mathtt{C} \end{array}
\qquad
\begin{array}{rr} & \mathtt{19B0} \\ - & \mathtt{FD4} \\ \hline & \mathtt{9DC} \end{array}
$$

Već na poziciji jedinica nije moguće obaviti oduzimanje cifara bez pozajmice, pošto je cifra jedinica umanjenika ($\mathtt{0}_{16}$) manja od cifre jedinica umanjioca ($\mathtt{4}_{16}$). Cifra sa susedne leve pozicije umanjenika ($\mathtt{B}_{16}$) je veća od nule, pa je pozajmica moguća. Cifra sa susedne leve pozicije umanjenika se smanjuje za 1 i njena nova vrednost je ($\mathtt{A}_{16}$). Kao i ranije, stara vrednost cifre umanjenika se precrtava, a njena nova vrednost se ispisuje iznad stare vrednosti. Pozajmljena cifra 1 sa susedne leve pozicije vredi $\mathtt{10}_{16}$, tj. šesnaest, kada pređe na tekuću poziciju jedinica i sabira se sa cifrom ($\mathtt{0}$) sa te pozicije. Samim tim je pogodno pisati pozajmicu kao broj 1 ispred tekuće pozicije i čitati pozajmicu i cifru tekuće pozicije kao jedan broj ($\mathtt{10}_{16}$) koji predstavlja novu vrednost tekuće pozicije. Sada je moguće oduzeti cifre jedinica jednu od druge: $\mathtt{10}_{16} - \mathtt{4}_{16} = \mathtt{16} - \mathtt{4} = \mathtt{12} = \mathtt{C}_{16}$.

Na sledećoj poziciji ulevo (druga pozicija zdesna koja odgovara prvom stepenu osnove) sada imamo cifre $\mathtt{A}_{16}$ i $\mathtt{D}_{16}$ i pošto je cifra umanjenika ponovo manja od cifre umanjioca na tekućoj poziciji, opet je neophodna pozajmica sa susedne leve pozicije na kojoj se nalazi cifra $\mathtt{9}_{16}$. Prema tome, cifra sa susedne leve pozicije umanjenika se smanjuje za 1 i njena nova vrednost je ($\mathtt{8}_{16}$). Pozajmljena cifra 1 sa susedne leve pozicije ponovo vredi $\mathtt{10}_{16}$, tj. šesnaest, kada pređe na tekuću poziciju jedinica. Nova vrednost cifre na tekućoj poziciji je zbir vrednosti pozajmice i cifre tekuće pozicije, tj. ($\mathtt{10}_{16} + \mathtt{A}_{16} = \mathtt{1A}_{16}$). Sada je moguće na tekućoj poziciji oduzeti cifru umanjioca od nove vrednosti cifre umanjenika: $\mathtt{1A}_{16} - \mathtt{D}_{16} = \mathtt{16} + \mathtt{10} - \mathtt{13} = \mathtt{13} = \mathtt{D}_{16}$.

Vrednosti cifara na sledećoj poziciji ulevo (treća pozicija zdesna koja odgovara drugom stepenu osnove) su $\mathtt{8}_{16}$ i $\mathtt{F}_{16}$, cifra umanjenika je još jednom manja od cifre umanjioca na tekućoj poziciji i još jednom je neophodna pozajmica sa susedne leve pozicije na kojoj se nalazi cifra $\mathtt{1}_{16}$. Prema tome, cifra sa susedne leve pozicije umanjenika se smanjuje za 1 i njena nova vrednost je ($\mathtt{0}_{16}$). Pozajmljena cifra 1 sa susedne leve pozicije ponovo vredi $\mathtt{10}_{16}$, tj. šesnaest, kada pređe na tekuću poziciju jedinica. Nova vrednost cifre na tekućoj poziciji je zbir vrednosti pozajmice i cifre tekuće pozicije, tj. ($\mathtt{10}_{16} + \mathtt{8}_{16} = \mathtt{18}_{16}$). Sada je moguće na tekućoj poziciji oduzeti cifru umanjioca od nove vrednosti cifre umanjenika: $\texttt{18}_{16} - \texttt{F}_{16} = 16 + 8 - 15 = 9 = \texttt{9}_{16}$.

Pošto su obe vrednosti cifara umanjenika i umanjioca na sledećoj poziciji ulevo (prva pozicija sleva koja odgovara četvrtom stepenu osnove) jednake nuli, oduzimanje je završeno i rezultat je $\texttt{9DC}_{16}$.

U drugom primeru heksadekadnog oduzimanja brojevi $\texttt{C000}_{16}$ i $\texttt{2EA}_{16}$ će redom igrati ulogu umanjenika i umanjioca:

$$
\begin{array}{r} \texttt{C\,0\,0\,0}_{16} \\ -\ \ \texttt{2\,E\,A}_{16} \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{r} \texttt{C\,0\,0\,0}_{16} \\ -\ \ \texttt{2\,E\,A}_{16} \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{r} \overset{\texttt{B}}{\cancel{\texttt{C}}}{}^{1}\texttt{0\,0\,0}_{16} \\ -\ \ \texttt{2\,E\,A}_{16} \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{r} \overset{\texttt{B}}{\cancel{\texttt{C}}}\overset{\texttt{F}}{\cancel{{}^{1}\texttt{0}}}{}^{1}\texttt{0\,0}_{16} \\ -\ \ \texttt{2\,E\,A}_{16} \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{r} \overset{\texttt{B}}{\cancel{\texttt{C}}}\overset{\texttt{F}}{\cancel{{}^{1}\texttt{0}}}\overset{\texttt{F}}{\cancel{{}^{1}\texttt{0}}}{}^{1}\texttt{0}_{16} \\ -\ \ \texttt{2\,E\,A}_{16} \\ \hline \texttt{6}_{16} \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} \overset{\texttt{B}}{\cancel{\texttt{C}}}\overset{\texttt{F}}{\cancel{{}^{1}\texttt{0}}}\overset{\texttt{F}}{\cancel{{}^{1}\texttt{0}}}{}^{1}\texttt{0}_{16} \\ -\ \ \texttt{2\,E\,A}_{16} \\ \hline \texttt{1\,6}_{16} \end{array}
\quad
\begin{array}{r} \overset{\texttt{B}}{\cancel{\texttt{C}}}\overset{\texttt{F}}{\cancel{{}^{1}\texttt{0}}}\overset{\texttt{F}}{\cancel{{}^{1}\texttt{0}}}{}^{1}\texttt{0}_{16} \\ -\ \ \texttt{2\,E\,A}_{16} \\ \hline \texttt{D\,1\,6}_{16} \end{array}
\quad
\begin{array}{r} \overset{\texttt{B}}{\cancel{\texttt{C}}}\overset{\texttt{F}}{\cancel{{}^{1}\texttt{0}}}\overset{\texttt{F}}{\cancel{{}^{1}\texttt{0}}}{}^{1}\texttt{0}_{16} \\ -\ \ \texttt{2\,E\,A}_{16} \\ \hline \texttt{B\,D\,1\,6}_{16} \end{array}
\quad
\begin{array}{r} \overset{\texttt{B}}{\cancel{\texttt{C}}}\overset{\texttt{F}}{\cancel{{}^{1}\texttt{0}}}\overset{\texttt{F}}{\cancel{{}^{1}\texttt{0}}}{}^{1}\texttt{0}_{16} \\ -\ \ \texttt{2\,E\,A}_{16} \\ \hline \texttt{B\,D\,1\,6}_{16} \end{array}
\quad
\begin{array}{r} \texttt{C\,0\,0\,0}_{16} \\ -\ \ \texttt{2\,E\,A}_{16} \\ \hline \texttt{B\,D\,1\,6}_{16} \end{array}
$$

Oduzimanje brojeva $\texttt{C000}_{16}$ i $\texttt{2EA}_{16}$ počinje na poziciji najmanje težine (prva pozicija zdesna). Cifra umanjenika manja od cifre umanjioca ($\texttt{0}_{16} < \texttt{A}_{16}$), pa je neophodna pozajmica. Kako je susedna leva cifra umanjenika takođe nula, započinje lančana pozajmica ulevo, tj. svaka sledeća (leva) cifra umanjenika jednaka nuli traži pozajmicu od svog levog suseda sve dok se ne naiđe na prvu cifru različitu od nule. Pronađena cifra umanjenika različita od nule ($\texttt{C}_{16}$) daje pozajmicu $\texttt{1}_{16}$ svom desnom susedu i njena vrednost se smanjuje na $\texttt{B}_{16}$. Lančana pozajmica se sada obavlja udesno, pri čemu svaka cifra jednaka nuli, koja je učestvovala u lančanoj pozajmici ulevo, najpre dobija vrednost $\texttt{10}_{16} = 16$ (jer pozajmljena jedinica levog suseda, kada pređe na tekuću poziciju, vredi koliko i osnova, tj. šesnaest), a potom, ako pozajmljuje svog desnog suseda, njena vrednost se smanjuje na $\texttt{F}_{16} = 15$. Lančana pozajmica se završava ponovo na poziciji najmanje težine odakle je i počela i tu vrednost ostaje $\texttt{10}_{16} = 16$ pošto jer nema pozajmice udesno. Sada je vrednost cifre umanjenika na tekućoj poziciji veća od odgovarajuće cifre umanjioca, pa je oduzimanje cifara moguće: $\texttt{10}_{16} - \texttt{A}_{16} = 16 - 10 = 6 = \texttt{6}_{16}$.

Lančanom pozajmicom su sve cifre umanjenika dobile dovoljno veliku vrednost da je oduzimanje cifara na ostalim pozicijama moguće direktno:

$$
\begin{aligned}
\texttt{F}_{16} - \texttt{E}_{16} &= 15 - 14 = 1 = \texttt{1}_{16} \\
\texttt{F}_{16} - \texttt{2}_{16} &= 15 - 2 = 13 = \texttt{D}_{16} \\
\texttt{B}_{16} - \texttt{0}_{16} &= 11 - 0 = 1 = \texttt{B}_{16}
\end{aligned}
$$

Prema tome, razlika brojeva $\texttt{C000}_{16}$ i $\texttt{2EA}_{16}$ je $\texttt{BD16}_{16}$. □

Primer 5.6. I u slučaju kada oduzimamo jedan binarni broj od drugog, postupamo po istim pravilima kao u primerima 5.4 i 5.5, pri čemu sada moramo voditi računa da je osnova broj dva. To znači da kada god dve pozicije razmene pozajmicu, pozajmljena cifra 1 sa susedne leve pozicije vredi dva (10_2) na tekućoj poziciji jer je osnova u kojoj računamo jednaka dva. Binarno oduzimanje objasnićemo na primeru brojeva $\texttt{1000 0101}_2$ i $\texttt{110 1011}_2$.

$$\begin{array}{r} 1000\;\;0101_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline \\ \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1000\;\;0101_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline 0_2 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1000\;\;0101_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline 0_2 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1000\;\;0\overset{0}{\cancel{1}}{}^{1}0\,1_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline 1\,0_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000\;\;0\overset{0}{\cancel{1}}{}^{1}0\,1_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline 0\,1\,0_2 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1000\;\;0\overset{0}{\cancel{1}}{}^{1}0\,1_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline 0\,1\,0_2 \end{array}\qquad \begin{array}{r} \overset{0}{\cancel{1}}{}^{1}0\,0\,0\;\;0\overset{0}{\cancel{1}}{}^{1}0\,1_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline 0\,1\,0_2 \end{array}\qquad \begin{array}{r} \overset{0}{\cancel{1}}\overset{1}{\cancel{0}}{}^{1}0\,0\;\;0\overset{0}{\cancel{1}}{}^{1}0\,1_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline 0\,1\,0_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{0}{\cancel{1}}\overset{1}{\cancel{0}}\overset{1}{\cancel{0}}{}^{1}0\;\;0\overset{0}{\cancel{1}}{}^{1}0\,1_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline 0\,1\,0_2 \end{array}\qquad \begin{array}{r} \overset{0}{\cancel{1}}\overset{1}{\cancel{0}}\overset{1}{\cancel{0}}\overset{1}{\cancel{0}}\;\;{}^{1}0\overset{0}{\cancel{1}}{}^{1}0\,1_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline 1\,0\,1\,0_2 \end{array}\qquad \begin{array}{r} \overset{0}{\cancel{1}}\overset{1}{\cancel{0}}\overset{1}{\cancel{0}}\overset{1}{\cancel{0}}\;\;{}^{1}0\overset{0}{\cancel{1}}{}^{1}0\,1_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline 1\;\;1010_2 \end{array}\qquad \begin{array}{r} \overset{0}{\cancel{1}}\overset{1}{\cancel{0}}\overset{1}{\cancel{0}}\overset{1}{\cancel{0}}\;\;{}^{1}0\overset{0}{\cancel{1}}{}^{1}0\,1_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline 0\,1\;\;1010_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{0}{\cancel{1}}\overset{1}{\cancel{0}}\overset{1}{\cancel{0}}\overset{1}{\cancel{0}}\;\;{}^{1}0\overset{0}{\cancel{1}}{}^{1}0\,1_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline 0\,0\,1\;\;1010_2 \end{array}\qquad \begin{array}{r} \overset{0}{\cancel{1}}\overset{1}{\cancel{0}}\overset{1}{\cancel{0}}\overset{1}{\cancel{0}}\;\;{}^{1}0\overset{0}{\cancel{1}}{}^{1}0\,1_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline 0\,0\,0\,1\;\;1010_2 \end{array}\qquad \begin{array}{r} \overset{0}{\cancel{1}}\overset{1}{\cancel{0}}\overset{1}{\cancel{0}}\overset{1}{\cancel{0}}\;\;{}^{1}0\overset{0}{\cancel{1}}{}^{1}0\,1_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline 1\;\;1010_2 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1000\;\;0101_2 \\ -\;\;110\;\;1011_2 \\ \hline 1\;\;1010_2 \end{array}$$

Oduzimanje cifara započinje na poziciji koja odgovara najnižem stepenu osnove (prva pozicija zdesna) gde umanjenik i umanjilac imaju istu cifru, 1, pa je razlika cifara na toj poziciji $1_2 - 1_2 = 0_2$.

Sledeća pozicija za oduzimanje cifara je druga pozicija zdesna. Direktno oduzimanje cifara nije moguće jer je cifra umanjenika manja od cifre umanjioca; $0 < 1$, pa je neophodna pozajmica. Cifra sa susedne leve pozicije (treća pozicija zdesna) je veća od nule, tako da je pozajmica moguća. Posle pozajmice na trećoj poziciji zdesna ostaje $1_2 - 1_2 = 0_2$ (staru vrednost cifre, 1, je precrtana, a nova, 0, se navodi iznad), dok na tekućoj poziciji sada imamo $10_2 = 2$, tj. kada pozajmljena jedinica pređe desno sa treće na drugu poziciju zdesna vredi koliko i osnova (dva). Kako je na tekućoj poziciji cifra pre pozajmice bila nula, nova vrednost posle pozajmice je $10_2 + 0_2 = 10_2 = 2$. Sada je oduzimanje cifara na tekućoj poziciji moguće i kao razliku dobijamo $10_2 - 1_2 = 2 - 1 = 1 = 1_2$.

Sledeća pozicija za oduzimanje cifara je treća pozicija zdesna. Posle pozajmice i umanjenik i umanjilac imaju istu cifru, 0, pa je razlika na toj poziciji $0_2 - 0_2 = 0_2$.

Na sledećoj poziciji za oduzimanje cifara (četvrta pozicija zdesna) ponovo je cifra umanjenika manja od cifre umanjioca; $0 < 1$, pa je neophodna pozajmica. Međutim, na susednoj levoj poziciji (četvrta pozicija sleva) cifra je jednaka nuli, pa pozajmica nije moguća, tako da nastupa lančana pozajmica, tj. pomeramo se levo i tražimo prvu poziciju na kojoj je cifra veća od nule, preskačući pozicije ukupno tri susedne leve pozicije na kojima je cifra jednaka nuli. Ispostavlja se da je tek na prvoj poziciji sleva cifra veća od nule, pa je pozajmica moguća. Posle pozajmice, na prvoj poziciji sleva ostaje $1_2 - 1_2 = 0_2$. Sada se lančana pozajmica nastavlja udesno, tj. na drugoj, trećoj i četvrtoj poziciji se redom dešava isti niz radnji:

- na tekućoj poziciji pozajmljena jedinica levog suseda vredi koliko i osnova, tj. $10_2 = 2$;
- pošto se desnom susedu pozajmljuje jedna jedinica, na tekućoj poziciji ostaje $10_2 - 1_2 = 2 - 1 = 1 = 1_2$ (staru vrednost cifre, 1, je precrtana, a nova, 0, se navodi iznad).

Lančana pozajmica se završava time što pozajmica stiže na četvrtu poziciju zdesna koja je i započela tu lančanu pozajmicu. Na četvrtoj poziciji zdesna je sada moguće obaviti oduzimanje cifara $\mathtt{10}_2 - \mathtt{1}_2 = 2 - 1 = 1 = \mathtt{1}_2$.

Oduzumanje cifara se nastavlja redom na četvrtoj, trećoj i drugoj poziciji sleva, gde je cifra umanjenika uvek ili veća od cifre umanjioca ili joj je jednaka, pa je direktno oduzimanje uvek moguće. Na četvrtoj poziciji sleva razlika cifara je $\mathtt{1}_2 - \mathtt{0}_2 = \mathtt{1}_2$, dok je na trećoj i drugoj poziciji sleva razlika cifara jednaka $\mathtt{1}_2 - \mathtt{1}_2 = \mathtt{0}_2$.

Oduzimanje cifara se završava na prvoj poziciji sleva: cifra umanjenika je jednaka nuli, kao i cifra umanjioca (koja nije navedena na početku zapisa broja). Pošto su prve tri cifre izračunate razlike jednake nuli, možemo ih izostaviti iz zapisa, tako da je konačan rezultat oduzimanja $\mathtt{1\ 1010}_2$.

Proveru možemo obaviti na nekoliko načina:

- brzim prebacivanjem binarnih brojeva u heksadekadni sistem, oduzimanjem njihovih zapisa u heksadekadnom sistemu i brzom konverzijom rezultata iz heksadekadnog u binarni sistem:

$$\mathtt{1000\ 0101}_2 - \mathtt{110\ 1011}_2 = \mathtt{85}_{16} - \mathtt{6B}_{16} = \mathtt{1A}_{16} = \mathtt{1\ 1010}_2$$

- primenom programa Calculator u okviru operativnog sistema Windows (v. str. 24).

□

Domaći zadatak 5.2. Heksadekadne brojeve iz primera 5.5 prebaciti u binarni sistem, oduzeti odgovarajuće binarne brojeve i dobijeni rezultat ponovo pretvoriti u heksadekadni zapis. Uporediti da li se dobija isti rezultat u heksadekadnom i binarnom sistemu.

5.3 Množenje u pozicionom sistemu sa proizvoljnom osnovom

Odeljci 5.1 i 5.2 su detaljno pokazali da je dovoljno da u u formulaciji svakog pravila dekadnog sistema za sabiranje i oduzimanje zamenimo pominjanje količine deset pojmom *osnova* i dobijamo pravila za sabiranje i oduzimanje u pozicionom sistemu sa proizvoljnom osnovom. Prema tome, nije veliko iznenađenje ako konstatujemo da su i pravila za množenje u sistemu sa proizvoljnom osnovom slična onima u dekadnom sistemu i da jedino o čemu treba da vodimo računa je vrednost osnove u kojoj trenutno radimo i kako izgleda tablica množenja, što ćemo ilustrovati na primeru binarnog brojnog sistema. S obzirom da binarni sistem ima samo dve cifre, njegova tablica množenja je krajnje jednostavna (Tabela 5.5).

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabela 5.5: Tablica množenja u binarnom pozicionom sistemu

Množenje u binarnom brojnom sistemu se odvija na isti način kao u dekadnom. Za svaku cifru drugog činioca c, jednu po jednu, u redosledu zdesna nalevo radimo sledeće:

(i) Cifrom c množimo redom cifre prvog činioca zdesna nalevo i beležimo rezultat u jednom redu takođe zdesna nalevo. U dekadnom sistemu, ako je rezultat množenja dve cifre dvocifren, beležimo samo cifru jedinica, a prenos se sabira sa rezultatom sledećeg množenja. Prilikom množenja binarnih cifara nikada neće biti prenosa (Tabela 5.5), ali zato može da se pojavi u nekoj drugoj osnovi (na primer, osnovi šesnaest, gde je $\mathtt{A}_{16} \cdot \mathtt{5}_{16} = \mathtt{32}_{16}$, što odgovara dekadnom proizvodu $10 \cdot 5 = 50$).

(ii) Dobijeni redovi sa međurezultatima se pišu jedan ispod drugog, pri čemu se svaki sledeći red pomera za jedno mesto ulevo.

(iii) Redovi sa međurezultatima koji se sastoje samo od nula se izostavljaju radi jednostavnijeg zapisa.

(iv) Proizvod brojeva se dobija sabiranjem međurezultata u pozicionom sistemu sa odgovarajućom osnovom.

Primer 5.7. Pomnožimo u binarnom brojnom sistemu sve moguće parove različitih dekadnih brojeva 5, 7 i 9. Koristeći razlaganje na stepene broja dva (8, 4, 2, 1), najpre pretvaramo dekadne brojeve u binarne: $5 = 4 + 0 + 1 = \mathtt{101}_2$, $7 = 4 + 2 + 1 = \mathtt{111}_2$ i $9 = 8 + 0 + 0 + 1 = \mathtt{1001}_2$. Prema tome, treba pomnožiti parove brojeva $\mathtt{101}_2$ i $\mathtt{111}_2$, $\mathtt{101}_2$ i $\mathtt{1001}_2$, $\mathtt{111}_2$ i $\mathtt{1001}_2$. Pošto kod množenja redosled činilaca nije bitan, lakše nam je da množimo brojem koji ima manje jedinica (Slika 5.6).

$$\begin{array}{r} 111_2 \\ \times\,101_2 \\ \hline 111_2 \\ +\,111_2 \\ \hline 100011_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101_2 \\ \times\,111_2 \\ \hline 101_2 \\ 101_2 \\ +\,101_2 \\ \hline 100011_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101_2 \\ \times\,1001_2 \\ \hline 101_2 \\ +\,101_2 \\ \hline 101101_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001_2 \\ \times\,101_2 \\ \hline 1001_2 \\ +\,1001_2 \\ \hline 101101_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001_2 \\ \times\,111_2 \\ \hline 1001_2 \\ 1001_2 \\ +\,1001_2 \\ \hline 111111_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111_2 \\ \times\,1001_2 \\ \hline 111_2 \\ +\,111_2 \\ \hline 111111_2 \end{array}$$

Slika 5.6: Proizvodi binarnih zapisa parova brojeva 5 i 7, 5 i 9, 7 i 9 sa činiocima u oba redosleda ($7 \cdot 5$, $5 \cdot 7$, $5 \cdot 9$, $9 \cdot 5$, $9 \cdot 7$, $7 \cdot 9$)

□

U dekadnom brojnom sistemu je važilo jednostavno pravilo za množenje proizvoljnog dekadnog broja x brojem deset, sto, hiljadu i ostalim stepenima broja deset: potrebno je samo prepisati broj x i sa njegove desne strane dopisati onoliko nula koliko se pojavljuje u stepenu broja deset kojim se množi. Na primer:

$$\begin{gathered} 24 \cdot 10 = 240 \\ 36 \cdot 100 = 3600 \\ 57 \cdot 1000 = 57000 \\ \ldots \end{gathered}$$

Navedeno pravilo množenja stepenima broja deset u dekadnom sistemu je razlog zašto se broj deset i njegovi stepeni nazivaju „okruglim brojevima” i tretiraju kao „specijalni, magični, posebni brojevi". Međutim, njihova „posebnost" i „magija" nestaje čim se pređe u drugu osnovu jer „posebnost" i „magiju" nemaju brojevi (u smislu: količine) već oznake brojeva. U slučaju dekadnih „posebnih" brojeva (deset, sto, hiljadu itd.) njihove oznake su 10, 100, 1000 itd. koje ti brojevi gube kada se promeni osnova. Upravo te oznake imaju „magiju" prilikom množenja zato što, kao što smo videli u odeljku 3.1, označavaju osnovu n pozicionog sistema ($n = 10_n$) i stepene osnove ($n^k = 1\underbrace{0\ldots0}_{k}{}_n$).

Prema tome, ponovo, ako zamenimo reč *deset* rečju *osnova*, dobijamo pravilo za jednostavno množenje u sistemu sa proizvoljnom osnovom n: proizvoljni broj x u sistemu sa osnovom n množi se k-tim stepenom osnove ($1\underbrace{0\ldots0}_{k}{}_n$) tako što se zapis broja x u osnovi n prepiše i sa desne strane se dopiše odgovarajući broj nula u zapisu stepena (k). Na primer,

$$\begin{aligned}
\mathtt{1101}_2 \cdot \mathtt{10}_2 &= \mathtt{11010}_2 = \mathtt{1\ 1010}_2\\
\mathtt{1101}_2 \cdot \mathtt{100}_2 &= \mathtt{110100}_2 = \mathtt{11\ 0100}_2\\
\mathtt{1101}_2 \cdot \mathtt{1000}_2 &= \mathtt{1101000}_2 = \mathtt{110\ 1000}_2\\
&\ldots\\
\mathtt{2A5}_{16} \cdot \mathtt{10}_{16} &= \mathtt{2A50}_{16}\\
\mathtt{2A5}_{16} \cdot \mathtt{100}_{16} &= \mathtt{2A500}_{16}\\
\mathtt{2A5}_{16} \cdot \mathtt{1000}_{16} &= \mathtt{2A5000}_{16}\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Ako pomnožimo brojem deset u pozicionom sistemu koji nije dekadni, vidimo da „magije" više nema ($10 = \mathtt{1010}_2 = \mathtt{A}_{16}$):

$$\begin{aligned}
\mathtt{1101}_2 \cdot \mathtt{1010}_2 &= \mathtt{10000010}_2 = \mathtt{1000\ 0010}_2\\
\mathtt{2A5}_{16} \cdot \mathtt{A}_{16} &= \mathtt{1A72}_{16}.
\end{aligned}$$

5.4 Celobrojno deljenje u pozicionom sistemu sa proizvoljnom osnovom

Kao i u slučaju množenja, sabiranja i oduzimanja, pravila za celobrojno deljenje u pozicionom sistemu sa proizvoljnom osnovom se preuzimaju iz dekadnog sistema zamenom reči *deset* rečju *osnova*, pri čemu se vodi računa o vrednosti osnove i o odgovarajućoj tablici množenja i deljenja. Ovde nećemo detaljno razmatrati celobrojno deljenje, sem jednog specijalnog slučaja kada se deli osnovom, odnosno stepenom osnove.

Podsetimo se kako izgleda deljenje osnovom i njenim stepenima u dekadnom brojnom sistemu:

$$\begin{aligned}
3476 : 10 &= 347, & 3476 \bmod 10 &= 6\\
3476 : 100 &= 34, & 3476 \bmod 100 &= 76\\
3476 : 1000 &= 3, & 3476 \bmod 1000 &= 476\\
3476 : 10000 &= 0, & 3476 \bmod 1000 &= 3476
\end{aligned}$$

Pravilo deljenja brojem deset, odnosno stepenom broja deset, može se formulisati na sledeći način: ako proizvoljni dekadni broj x podelimo k-tim stepenom broja deset (tj. brojem čiji zapis sadrži jednu jedinicu i k nula), tada odbacivanjem poslednjih k cifara (sa desne strane) dobijamo celobrojni količnik, dok broj čiji se zapis sastoji od odbačenih cifara predstavlja ostatak pri celobrojnom deljenju. Dakle, kada delimo dekadni broj (u datom primeru 3476) brojem deset, odbacujemo poslednju cifru deljenika (i to je ostatak pri celobrojnom deljenju, u datom primeru 6), a neodbačene cifre (u datom primeru 347) predstavljaju celobrojni količnik. Slično, kada delimo dekadni broj (u datom primeru 3476) brojem sto, odbacujemo poslednje dve cifre deljenika (i to je ostatak pri celobrojnom deljenju, u datom primeru 76), a neodbačene cifre (u datom primeru 34) predstavljaju celobrojni količnik. Na isti način se mogu formulisati konkretna pravila za deljenje svakim pojedinačnim stepenom broja deset.

Prethodno formulisano pravilo se uopštava za pozicioni sistem sa proizvoljnom osnovom n na sledeći način: ako proizvoljni broj x podelimo k-tim stepenom *osnove* (tj. brojem čiji zapis sadrži jednu jedinicu i k nula), tada odbacivanjem poslednjih k cifara (sa desne strane) dobijamo celobrojni količnik, dok broj čiji se zapis sastoji od odbačenih cifara predstavlja ostatak pri celobrojnom deljenju.

$$
\begin{array}{rl}
\mathtt{110101}_2 : \mathtt{10}_2 = \mathtt{11010}_2, & \mathtt{110101}_2 \bmod \mathtt{10}_2 = \mathtt{1}_2 \\
\mathtt{110101}_2 : \mathtt{100}_2 = \mathtt{1101}_2, & \mathtt{110101}_2 \bmod \mathtt{100}_2 = \mathtt{01}_2 = \mathtt{1}_2 \\
\mathtt{110101}_2 : \mathtt{1000}_2 = \mathtt{110}_2, & \mathtt{110101}_2 \bmod \mathtt{1000}_2 = \mathtt{101}_2 \\
\mathtt{110101}_2 : \mathtt{10000}_2 = \mathtt{11}_2, & \mathtt{110101}_2 \bmod \mathtt{10000}_2 = \mathtt{0101}_2 = \mathtt{101}_2 \\
\ldots & \\
\mathtt{6F9B3}_{16} : \mathtt{10}_{16} = \mathtt{6F9B}_{16}, & \mathtt{6F9B3}_{16} \bmod \mathtt{10}_{16} = \mathtt{3}_{16} \\
\mathtt{6F9B3}_{16} : \mathtt{100}_{16} = \mathtt{6F9}_{16}, & \mathtt{6F9B3}_{16} \bmod \mathtt{100}_{16} = \mathtt{B3}_{16} \\
\mathtt{6F9B3}_{16} : \mathtt{1000}_{16} = \mathtt{6F}_{16}, & \mathtt{6F9B3}_{16} \bmod \mathtt{1000}_{16} = \mathtt{9B3}_{16} \\
\mathtt{6F9B3}_{16} : \mathtt{10000}_{16} = \mathtt{6}_{16}, & \mathtt{6F9B3}_{16} \bmod \mathtt{10000}_{16} = \mathtt{F9B3}_{16} \\
\ldots &
\end{array}
$$

Ako pažljivije pogledamo navedene primere određivanja celobrojnog količnika i ostatka pri deljenju stepenom osnove u dekadnom, binarnom i heksadekadnom sistemu, možemo pravila izračunavanja količnika i ostatka formulisati jednostavnije na sledeći način:

- Ako je delilac stepen osnove, onda se njegov zapis sastoji od jedne jedinice i određenog broja nula. Prebrojimo koliko ima nula u zapisu delioca (neka ih ima k).
- U zapisu deljenika povucimo vertikalnu crtu koja deli cifre na dve grupe, pri čemu desna grupa sadrži tačno k cifara (tj. onoliko cifara koliko delilac ima nula). Tada leva grupa cifara predstavlja celobrojni količnik, a desna grupa cifara — ostatak pri celobrojnom deljenju (Tabela 5.6).

Iz prethodnih pravila se neposredno zaključuje da je broj u sistemu sa osnovom n deljiv k-tim stepenom osnove ako se njegov zapis u toj osnovi završava sa bar k nula (sa desne strane). Dakle, kao što smo u dekadnom sistemu znali da je broj 567000 deljiv sa

$\texttt{110101}_2$		$\texttt{6F9B3}_{16}$	
stepen osnove 2	količnik | ostatak	stepen osnove 16	količnik | ostatak
$10_2 = 2^1 = 2$	$\texttt{11010} \mid \texttt{1}_2$	$10_{16} = 16^1 = 16$	$\texttt{6F9B} \mid \texttt{3}_{16}$
$100_2 = 2^2 = 4$	$\texttt{1101} \mid \texttt{01}_2$	$100_{16} = 16^2 = 256$	$\texttt{6F9} \mid \texttt{B3}_{16}$
$1000_2 = 2^3 = 8$	$\texttt{110} \mid \texttt{101}_2$	$1000_{16} = 16^3 = 4096$	$\texttt{6F} \mid \texttt{9B3}_{16}$
$10000_2 = 2^4 = 16$	$\texttt{11} \mid \texttt{0101}_2$	$10000_{16} = 16^4 = 65536$	$\texttt{6} \mid \texttt{F9B3}_{16}$

Tabela 5.6: Količnici i ostaci pri deljenju brojeva $\texttt{110101}_2$ i $\texttt{6F9B3}_{16}$ stepenima odgovarajuće osnove sa izložiocima 1–4

deset (jer mu se zapis završava nulom), sa sto (jer mu se zapis završava sa dve nule), sa hiljadu (jer mu se zapis završava sa tri nule) i da nije deljiv sa deset hiljada (jer mu se zapis ne završava sa četiri nule), tako isto možemo izvesti sledeće zaključke:

- Binarni broj $\texttt{110100}_2$ je deljiv brojem 2 ($2 = 2^1 = \texttt{10}_2$) i brojem 4 ($4 = 2^2 = \texttt{100}_2$) jer mu se zapis završava jednom nulom, odnosno sa dve nule, ali nije deljiv brojem 8 ($8 = 2^3 = \texttt{1000}_2$) jer mu se zapis ne završava sa tri nule.
- Heksadekadni broj $\texttt{3B4C00}_{16}$ je deljiv brojem 16 ($16 = 16^1 = \texttt{10}_{16}$) i brojem 256 ($256 = 16^2 = \texttt{100}_{16}$) jer mu se zapis završava jednom nulom, odnosno sa dve nule, ali nije deljiv brojem 4096 ($4096 = 16^3 = \texttt{1000}_{16}$) jer mu se zapis ne završava sa tri nule.

Bibliografija

Bilimović, A. [1965]. *Elementi više matematike. 1, Funkcija, izvod, diferencijal*, Tehnička knjiga, Beograd. 3

Courant, R. & Robbins, H. [1973]. *Šta je matematika? : elementarni pristup idejama i metodama*, Naučna knjiga, Beograd. 4

Dantzig, T. [2005]. *Number : The Language of Science*, Pi Press, New York. 3

Krstev, C. [2002]. Informatika I, skripta.
URL: *http://poincare.matf.bg.ac.rs/~cvetana/Nastava/Materijal/BrojniSistemi.pdf* 2

Mlodinov, L. [2005]. *Euklidov prozor : priča o geometriji, od paralelnih linija do hipersvemira*, Laguna, Beograd. preveo sa engleskog Zoran Živković. 2