Osnovni pojmovi iz teorije skupova

Cvetana Krstev

December 6, 2012

Poglavlje 2

Teorija skupova

2.1 Osnovni koncepti iz teorije skupova

2.1.1 Pojam skupa

Skup je apstraktna kolekcija koju čine članovi ili elementi. Članovi skupa mogu biti konkretni objekti ili neka vrsta apstrakcije. Predmet teorije skupova je ono što se može reći za sve skupove. Prema tome priroda članova skupova nije od značaja za tvrđenja koja se o njima mogu izreći u okviru teorije skupova. Skupovi mogu biti *konačni*, kao na primer skup neparnih brojeva između 100 i 1000, ili *beskonačni*, kakav je na primer skup svih neparnih brojeva.

Skup može biti *dobro definisan* čak iako elementi skupa nisu široko poznati (na primer, skup svih Rimskih imperatora), ako elemente skupa nije lako utvrditi (na primer, skup svih živih bivših učitelja), ili ako je elemente skupa nemoguće utvrditi na sadašnjem nivou znanja (na primer, skup svih naseljenih planeta naše galaksije). Da bi skup bio dobro definisan mora biti jasno šta su mu članovi. Na primer, skup svih planina *nije dobro definisan* sve dok se ne utvrdi kriterijum šta je planina a šta je brdo, šta je planina sa dva vrha a šta su dve planine.

Prema konvenciji se skupovi označavaju velikim slovima a elementi skupa malim slovima. Zapis „$x \in A$“ označava da je x element (ili član) skupa A, dok zapis „$x \notin A$“ označava da x nije element skupa A. Sami skupovi mogu biti elementi drugih skupova i tada se ova konvencija označavanja malim i velikim slovima mora napustiti.

2.1.2 Specifikacija skupa

Georg Kantor, koji je zasnovao teoriju skupova oko 1870. godine, definisao je skupove na sledeći način:

> Pod „skupom" ćemo podrazumevati bilo koju kolekciju M definisanih i raspoznatljivih objekata m (koje ćemo nazivati „elementima" od M) iz naše intuicije ili naših misli.

U praksi se skup obično specifikuje na jedan od tri načina. Ako je skup konačan moguće je pobrojati članove. Na primer, skup $\{2, 18, 6\}$ je skup koji se sastoji od tri člana, brojeva $2, 18$ i 6. Redosled navođenja članova skupa nije bitan. Za veće skupove za koje je obrazac navođenja jasan mogu se koristiti tačkice $\ldots$. Na primer, skup svih neparnih celih brojeva između 100 i 1000 bi se mogao označiti sa:

$$\{101, 103, 105, 107, \ldots, 997, 999\}$$

.

Beskonačni skup se obično specifikuje navođenjem osobine svih njegovih članova. Uobičajena notacija koristi *promenljivu* koja označava član skupa i *uslov* izražen preko te promenljive. Na primer, skup svih parnih brojeva većih od 0 mogao bi se specifikovati sa

$$A = \{x \mid x \text{ je paran i } x \text{ je veće od } 0\}$$

a čita se: „A je skup svih x takvih da je x paran broj i da je x veći od 0". Još neki primeri skupova bili bi:

$$\begin{aligned}
B &= \{x \mid x \in A \text{ i } x \text{ je veće od } 10\} \\
C &= \{x \mid x \text{ je prost broj ili } x \text{ je slon}\} \\
D &= \{x \mid x \text{ je živo biće sa četiri noge ako su pegazi izmišljeni} \\
&\qquad \text{i živo biće sa dve noge ako su pegazi stvarni}\}
\end{aligned}$$

Na osnovu ovih specifikacija zaključujemo da skup B sadrži sve parne brojeve veće od 10, skup C sve proste brojeve i sve slonove dok skup D sadrži sve četvoronošce (ili, nasuprot, sve dvonošce ako smatramo da pegazi stvarno postoje).

U vreme nastanka teorije skupova smatralo se da svaka osobina koja se može zamisliti može poslužiti za specifikovanje skupa. Engleski filozof Bertrand Rasel je 1901. godine otkrio paradoks koji je nastao od naizgled prihvatljive osobine kojom se specifikuje skup. Rasel je prvi uočio da ako se skupovi definišu preko osobina svojih članova neki skupovi će biti sami sebi članovi dok drugi neće. Na primer, skup svih slonova sam nije slon pa prema tome nije član samog sebe, to jest skupa slonova. S druge strane, skup svih apstraktnih koncepata je i sam apstraktni koncept pa je prema tome član tog istog skupa. Izgleda, s toga da je osobina „biti član samog sebe“ i „ne biti član samog sebe“ dobro definisana osobina pomoću koje se mogu definisati skupovi. Konkretno, može se definisati skup U kao skup svih onih skupova koji sami sebi nisu član:

$$U = \{x \mid x \notin x\}$$

Tada se možemo zapitati da li je U sam sebi član ili ne. Ako U *nije* sam sebi član, onda on zadovoljava uslov koji je potreban da bi nešto bilo član skupa U (to jest, $x \notin x$), i prema tome *jeste* član od U, odnosno jeste sam sebi član. Ako je, pak, U sam sebi član, onda on ne zadovoljava uslov da bude član skupa U pa prema tome *nije* član od U, to jest samog sebe. Pošto se iz obe pretpostavke izvodi suprotno tvrđenje, dobija se logički paradoks.

Iz ovog paradoksa sledi zaključak da ovakav skup U ne može da postoji. U Kantorovoj teoriji skupova nije bilo ničega što bi onemogućilo specifikovanje ovakvog skupa. Reakcije na otkriće ovog paradoksa, bile su mnogobrojne počev od negiranja same teorije skupova pa do pokušaja da se pronađu drugi načini za specifikovanje skupova kojima se izbegava pojava ovakvih paradoksa.

Drugi način da se definišu beskonačni skupovi je uvođenje nekog *pravila* za rekurzivno generisanje elemenata skupa iz neke konačne osnove. Na primer, skup $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ može se specifikovati i navođenjem osobina svih njegovih elemenata na sledeći način:

$$E = \{x \mid x \text{ je paran i } x \text{ je veće od } 0\}$$

Svi elementi ovog skupa, i samo oni, mogu se generisati primenom sledećih pravila:

a) $2 \in E$;

b) ako je $x \in E$ onda je i $x + 2 \in E$;

c) ništa drugo ne pripada skupu E.

Prvim delom pravila utvrđuje se da je 2 element skupa E. Primenjujući drugi deo pravila do u beskonačnost utvrđuje se da pošto je $2 \in E$ onda je i $4 \in E$, a pošto je $4 \in E$ onda je i $6 \in E$, i tako dalje. Treći deo pravila obezbeđuje da ništa osim ovako generisanih elemenata nije element skupa E.

U opštem slučaju pravila za generisanje članova skupa imaju sledeći oblik:

> Prvo se navodi konačan broj članova za koje se eksplicitno navodi da su članovi skupa E (najmanje jedan, a može ih biti i više). Zatim se

navodi konačan broj *ako-nda* iskaza koji specifikuju neki odnos između članova skupa, tako da se do svakog člana skupa može doći sledeći lanac ako-onda iskaza polazeći od jednog člana specifikovanog u prvom delu pravila. Ništa što nije član skupa E ne sme se naći u jednom takvom lancu.

Primer

Neka skup A sadrži sledeće članove $A = \{7, 17, 27, 37, \ldots\}$. On se može specifikovati navođenjem osobina svih njegovih elemenata na sledeći način:

$$A = \{x \mid x \text{ je prirodan broj i } x + 3 \text{ je deljivo sa } 10\}$$

ili

$$A = \{x \mid x \text{ je prirodan broj čija je poslednja cifra } 7\}$$

Navođenjem pravila za generisanje članova skupa, isti skup se može specifikovati na sledeći način:

a) $7 \in A$;

b) ako je $x \in A$ onda je i $x + 10 \in A$;

c) ništa drugo ne pripada skupu A.

Primer

Neka skup B sadrži sledeće članove $B = \{1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \ldots\}$. On se može specifikovati navođenjem osobina svih njegovih elemenata na sledeći način:

$$B = \{x \mid x = 1/2^n \text{ a } n \text{ je nenegativan ceo broj }\}$$

Navodjenjem pravila za generisanje članova skupa, isti skup se može specifikovati na sledeći način:

a) $1 \in B$;

b) ako je $x \in B$ onda je i $x/2 \in B$;

c) ništa drugo ne pripada skupu B.

Primer

Neka skup C sadrži sledeće članove $C = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots\}$. On se može specifikovati navođenjem osobina svih njegovih elemenata na sledeći način:

$$C = \{x \mid x \text{ je paran ceo broj }\}$$

Navodjenjem pravila za generisanje članova skupa, isti skup se može specifikovati na sledeći način:

a) $0 \in C$;

b) ako je $x \in C$ i $x \geq 0$ onda je i $x + 2 \in C$; ako je $x \in C$ i $x < 0$ onda je i $x - 2 \in C$;

c) ništa drugo ne pripada skupu C.

Primer

Neka skup C sadrži sledeće članove $D = \{0.1, 0.11, 0.111, \ldots\}$. On se može specifikovati navođenjem osobina svih njegovih elemenata na sledeći način:

$$D = \{x \mid x = 1/10 + 1/10^2 + 1/10^3 + \ldots + 1/10^k, \\ \text{gde je } k \text{ ceo broj } \geq 1\}$$

Navodjenjem pravila za generisanje članova skupa, isti skup se može specifikovati na sledeći način:

a) $0.1 \in D$;

b) ako je $x \in D$ onda je i $0.1 + x/10 \in D$;

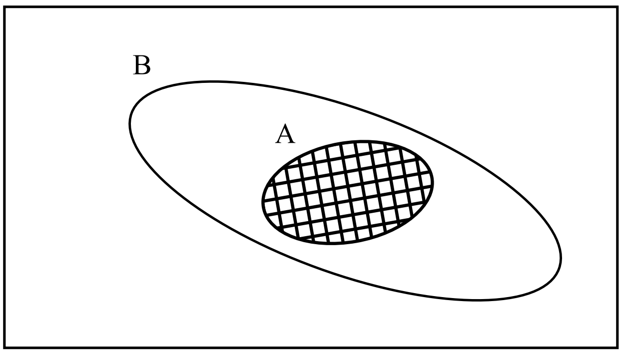
c) ništa drugo ne pripada skupu D.

2.1.3 Podskup, pravi podskup

A je *podskup* skupa B, piše se $A \subseteq B$ ako je svaki član skupa A istovremeno i član skupa B.

Primer

Neka je $F = \{a, b, c\}$. Podskupovi skupa F su: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, sam skup $F = \{a, b, c\}$ i prazan skup $\emptyset$ koji je podskup svakog skupa.



Slika 2.1: Venov dijagram koji ilustruje relaciju $A \subseteq B$

Primer

Neka je $A = \{10, 20, 30, \ldots\}$. Ovaj skup se može specifikovati navođenjem osobina svih njegovih elemenata na sledeći način:

$$A = \{x \mid x \text{ je prirodan broj i } x \text{ je deljivo sa } 10\}$$

Ovaj skup je podskup skupa $B = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$ koji se može specifikovati navođenjem osobina svih njegovih elemenata na sledeći način:

$$B = \{x \mid x \text{ je prirodan broj i } x \text{ je deljivo sa } 5\}$$

Dakle, $A \subseteq B$.

Primer

Skup svih parnih celih brojeva nije podskup skupa svih pozitivnih celih brojeva jer negativni parni brojevi nisu u njega uključeni.

A je *pravi podskup* skupa B, piše se $A \subset B$, ako je A podskup skupa B i B sadrži bar jedan član koji nije u A, to jest svi podskupovi od B osim samog B su njegovi pravi podskupovi.

Primer

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ i $C = \{3\}$. Tada važi da je $B \subset A$ i $C \subset A$. Takođe važi da $A \not\subset A$ i $B \not\subset B$ i $C \not\subset C$ i $C \not\subset B$. Osim toga važi da je $A \subseteq A$ i $B \subseteq B$ i $C \subseteq C$ i $C \not\subseteq B$.
Skupovi A, B i C mogu se specifikovati i navođenjem osobina njihovih elemenata na sledeći način:

$$\begin{aligned}
A &= \{x \mid x = 1 \text{ ili } x = 2 \text{ ili } x = 3\} \\
A &= \{x \mid x \text{ je ceo broj veći od 0 i manji od 4}\} \\
A &= \{x \mid x \in B \text{ ili } x \in C\} \\
B &= \{x \mid x \text{ je ceo broj veći od 0 i manji od 3}\} \\
B &= \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin C\} \\
C &= \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}
\end{aligned}$$

2.1.4 Univerzum, prazan skup

U okviru određene teme ili domena često je pogodno govoriti o *univerzumu*, što može biti skup svih celih brojeva, skup svih smrtnika ili skup svih podskupova nekog skupa. Univerzum se obično označava sa U ili E. Specifikovanje univerzuma olakšava specifikovanje skupova.

Primer

Neka je dat skup $G = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Ako u određenom kontekstu univerzum nije specifikovan onda se skup G može specifikovati na sledeći način:

$$G = \{x \mid x \text{ je ceo broj i } x \text{ je pozitivan i } x \text{ je paran}\}$$

Ako se specifikuje da je univerzum skup pozitivnih celih brojeva onda se G može specifikovati kao

$$\begin{array}{rcl} U & = & \{x \mid x \text{ je ceo broj i } x \text{ je pozitivan}\} \\ G & = & \{x \mid x \text{ je paran}\} \end{array}$$

Prazan skup je skup koji nema članove pa je on podskup svakog skupa. Obično se označava sa $\emptyset$. Moguće specifikacije praznog skupa su:

$$\begin{array}{rcl} \emptyset & = & \{x \mid x \text{ je neparan broj i } x \text{ je deljivo sa } 2\} \\ \emptyset & = & \{x \mid x \neq x\} \end{array}$$

Zadatak

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ i $C = \{3\}$. Šta su podskupovi skupova A, B i C? Šta su njihovi pravi podskupovi?

Rešenje

Podskupovi skupova A, B i C su:

$$\begin{array}{rcl} A & \to & \emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\} \\ & & (\text{ukupno } 2^3 = 8) \\ B & \to & \emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\} \\ & & (\text{ukupno } 2^2 = 4) \\ C & \to & \emptyset,\ \{3\} \\ & & (\text{ukupno } 2^1 = 2) \end{array}$$

Pravi podskupovi skupova A, B i C su:

$$\begin{array}{rcl} A & \to & \emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\} \\ & & (\text{ukupno } 2^3 - 1 = 7) \\ B & \to & \emptyset,\ \{1\},\ \{2\} \\ & & (\text{ukupno } 2^2 - 1 = 3) \\ C & \to & \emptyset \\ & & (\text{ukupno } 2^1 - 1 = 1) \end{array}$$

U opštem slučaju, skup od n elemenata ima 2^n podskupova, odnosno $2^n - 1$ pravih podskupova.

Zadatak

Neka je $X = \{A, \{A\}\}$, $Y = \{\{A\}\}$ i $Z = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Šta su članovi a šta podskupovi skupova X, Y i Z?

Rešenje

Članovi skupova X, Y i Z su:

$$\begin{array}{lcl} X & \rightarrow & A,\ \{A\}\ (A \text{ i skup koji sadrži } A) \\ Y & \rightarrow & \{A\}\ (\text{skup koji sadrži } A) \\ Z & \rightarrow & \emptyset,\ \{\emptyset\}\ (\text{prazan skup i skup koji sadrži prazan skup}) \end{array}$$

Podskupovi skupova X, Y i Z su:

$$\begin{array}{lcl} X & \rightarrow & \emptyset,\ \{A\},\ \{\{A\}\},\ \{A, \{A\}\} \\ Y & \rightarrow & \emptyset,\ \{\{A\}\} \\ Z & \rightarrow & \emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \end{array}$$

Zadatak

Neka je S proizvoljan skup. Odgovoriti na sledeća pitanja:

a) Da li je S član skupa $\{S\}$?

b) Da li je $\{S\}$ član skupa $\{S\}$?

c) Da li je $\{S\}$ podskup skupa $\{S\}$?

d) Kako bi označili skup čiji je jedini član $\{S\}$?

Rešenje

a) Da. b) Ne. c) Da. d) $\{\{S\}\}$

Zadaci za vežbu

1. Specifikujte naredne skupove navođenjem osobina svih njegovih članova i navođenjem pravila generisanja:

   a) $A = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$;

   b) $B = \{3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, \ldots\}$. (Napomena: Prvo pravilo generisanja uvodi 2 člana koja pripadaju skupu).

c) $C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$

2. Neka je $A = \{x \mid x = n^2 - 1, \text{gde je } n \text{ ceo broj i} n > 0\}$.

   a) Navesti najmanje 6 članova ovog skupa;

   b) Specifikovati skup navođenjem pravila generisanja.

3. Za skup $S = \{\{\emptyset\}, \{A\}, A\}$ navesti:

   a) sve njegove članove;

   b) sve njegove podskupove;

   c) da li je $\{A, \{A\}\}$ podskup od S;

   d) da li je $\emptyset$ član skupa S?

4. Neka je skup $P = \{1, \{2, 3\}, 3\}$. Koja tvrđenja su tačna:

   a) $\{1\} \in P$;

   b) $1 \in P$;

   c) $\{3, 2\} \in P$;

   d) $\{2, 3\} \subset P$;

   e) $\{\{2, 3\}\} \subset P$;

   f) $2 \in P$;

   g) $3 \in P$?

2.2 Operacije i relacije na skupovima

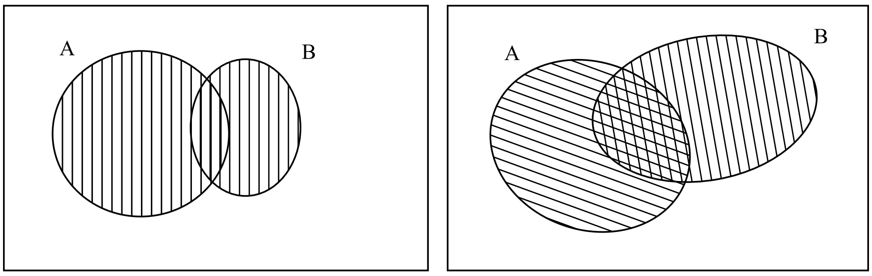
2.2.1 Jednakost, nejednakost, disjunktnost

Skup A je *jednak* skupu B ili je *identičan* skupu B, piše se $A = B$, ako i samo ako imaju tačno iste članove. Prema tome, dva skupa mogu biti identična iako su definisana na potpuno različite načine, kao što smo videli na više primera u prethodnom odeljku.

Primer

Neka su skupovi C, D i E definisani na sledeći način:

$$\begin{aligned} C &= \{x \mid x \text{ je osoba sa tri živa roditelja}\} \\ D &= \{x \mid x \text{ je četvoronožac sa tri noge}\} \\ E &= \{x \mid x \text{ je pozitivan broj manji od } 0\} \end{aligned}$$



Slika 2.2: Venov dijagram koji ilustruje operacije $A \cup B$ i $A \cap B$

Tada je $C = D = E = \emptyset$

Primer

Redosled navođenja članova skupa nije od značaja. S toga je,

$$\{2,1,5,4\} = \{4,1,2,5\} = \{5,2,4,1\}$$

Skupovi A i B su *nejednaki*, piše se $A \neq B$ ako nemaju sve iste članove, odnosno ako postoji bar jedan član skupa A koji nije član skupa B ili, obrnuto, bar jedan član skupa B koji nije član skupa A.

Skupovi A i B su *disjunktni*, odnosno uzajamno se isključuju, ako i samo ako nemaju zajedničkih elemenata.

Primer

Disjunktni su skupovi $\{0,1\}$ i $\{2,3\}$. Skupovi $\{2\}$ i $\{2,3\}$ nisu disjunktni iako važi $\{2\} \neq \{2,3\}$.

2.2.2 Unija i presek

Unija skupa A i B, piše se $A \cup B$, je skup svih članova koji pripadaju skupu A ili skupu B ili oboma.

Presek skupa A i skupa B, piše se $A \cap B$, je skup svih članova koji pripadaju i skupu A i skup B.

Primer

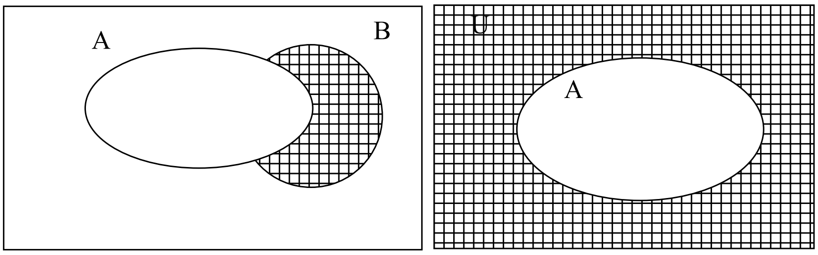
Neka je $A = \{0,1,2,3\}$ i $B = \{2,4,6\}$. Tada je,

$$\begin{aligned} \{0,1,2,3\} \cup \{2,4,6\} &= \{0,1,2,3,4,6\} \\ \{0,1,2,3\} \cap \{2,4,6\} &= \{2\} \end{aligned}$$

Primer

Neka su skupovi F i G definisani na sledeći način:

$$F = \{x \mid x \text{ je ceo broj i } x \text{ je negativan broj}\} = \{-1,-2,\ldots\}$$



Slika 2.3: Venov dijagram koji ilustruje operacije $B - A$ i $\bar{A}$

$$G = \{x \mid x \text{ je ceo broj i } x \text{ je nenegativan broj}\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Tada je $F \cup G = \{x \mid x \text{ je ceo broj}\}$ a $F \cap G = \emptyset$, a to znači da su skupovi F i G disjunktni.

2.2.3 Komplement

Komplement skupa A relativno u odnosu na skup B, piše se $B - A$, je skup svih onih članova skupa B koji nisu članovi skupa A. Ako je B fiksiran u nekom trenutku kao univerzum (skup E), možemo da govorimo jednostavno o komplementu od A, što se zapisuje sa $\bar{A}$ a znači $E - A$.

Primer

Neka je $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ i $B = \{0, 5, 10, 15, 20\}$. Tada je, $A - B = \{2, 4, 6, 8\}$.

Primer

Neka su skupovi H i J definisani na sledeći način:

$$\begin{aligned} H &= \{x \mid x \text{ je ceo broj}\} = \\ &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \\ J &= \{x \mid x \text{ je ceo broj i } x \text{ je paran}\} = \\ &= \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} \end{aligned}$$

Onda je razlika ova dva skupa, odnosno komplement skupa J u odnosu na skup H:

$$\begin{aligned} H - J &= \{x \mid x \text{ je ceo broj i } x \text{ je neparan}\} = \\ &= \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\} \end{aligned}$$

Primer

Ako je univerzum skup svih ljudi, onda je komplement skupa svih odraslih muškaraca skup svih žena i dece. Definisanje univerzuma je bitno. Bez definisanja univerzuma, komplement bi sadržao mačke, kućiće, da ne govorimo o stolovima, neparnim brojevima i simfonijama.

2.2.4 Partitivni skup

Partitivni skup skupa A, piše se $\mathcal{P}(A)$, je skup svih podskupova od A.

Primer

Neka je $K = \{a, b\}$. Tada je, $\mathcal{P}(K) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Primer

Neka je $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$, $C = \{d, e, f\}$. Tada važi sledeće:

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{a, b, c, d\} \\
A \cap B &= \{c\} \\
A \cup (B \cap C) &= \{a, b, c\} \cup (\{c, d\} \cap \{d, e, f\}) = \\
&= \{a, b, c\} \cup \{d\} = \{a, b, c, d\} \\
C \cap A &= \emptyset \\
B \cup \emptyset &= B = \{c, d\} \\
A \cap B \cap C &= \{a, b, c\} \cap \{c, d\} \cap \{d, e, f\} = \\
&= \{c\} \cap \{d, e, f\} = \emptyset \\
A - B &= \{a, b\}
\end{aligned}$$

Takođe, $a \notin \{A, B\}$ (to jest, a nije član skupa čiji su članovi skupovi A i B) ali $a \in A \cup B$.

Zadatak

Ako je $D \subseteq E$, šta je $D \cup E$ a šta $D \cap E$?

Rešenje

$D \cup E = E$, $D \cap E = D$.

Zadatak

Ako su skupovi F i G disjunktni, šta je $F \cap G$ a šta $F - G$?

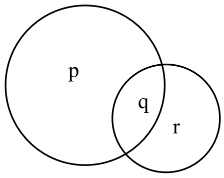
Rešenje

$F \cap G = \emptyset$, $F - G = F$.

Zadatak

Unija dva skupa ima 15 elemenata, jedan od njih ima 8, a njihov presek 5. Koliko elemenata ima drugi skup?

Rešenje



$$\begin{aligned} p+q+r &= 15 \\ p+q &= 8 \Rightarrow r = 7 \\ q &= 5 \Rightarrow p = 3 \\ r+q &= 12 \end{aligned}$$

Drugi skup ima 12 elemenata.

Zadatak

Odrediti elemente skupova A, B i C ako je: $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$, $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$, $A - B = \{1,3,5\}$, $C - B = \{2,4\}$ i $(A \cap B) - C = \{6\}$.

Rešenje

- Na osnovu $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$ zaključujemo da su mogući elementi skupova A, B i C elementi $1,2,3,4,5,6$.
- Na osnovu $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$ zaključujemo da skup C nema iste elemente kao skupovi A i B (skup C je disjunktan skupu $A \cup B$).
- Na osnovu $A - B = \{1,3,5\}$ zaključujemo da skup A sigurno sadrži elemente 1, 3 i 5, a skup B ih ne sadrži.
- Na osnovu $C - B = \{2,4\}$ zaključujemo da skup C sigurno sadrži elemnte 2 i 4, a da ih skup B ne sadrži (što smo već znali).
- Na osnovu $(A \cap B) - C = \{6\}$ zaključujemo da i skup A i skup B sigurno sadrže element 6, a skup C ga ne sadrži (i to smo već znali).
- Prema tome, $A = \{1,3,5,6\}$, $B = \{6\}$ i $C = \{2,4\}$.

Zadatak

Dati su skupovi $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ i $B = \{b,c,e,f,g\}$. Odrediti skup X koji zadovoljava: $(A \cup B) \cap X = \{c,d\}$ i $B \cup X = \{b,c,d,e,f,g,h,i\}$.

Rešenje

- Na osnovu $(A \cup B) \cap X = \{c, d\}$ zaključujemo da $\{c, d\} \subset X$ i da $\{a, b, e, f, g\} \not\subset X$.
- Na osnovu $B \cup X = \{b, c, d, e, f, g, h, i\}$ zaključujemo da $\{d, h, i\} \subset X$ i da je X podskup od $\{b, c, d, e, f, g, h, i\}$, odnosno zbog prethodnog je podskup od $\{c, d, h, i\}$.
- Odatle sledi da $X = \{c, d, h, i\}$.

Zadatak

Odrediti sve skupove X koji zadovoljavaju sledeće jednačine: a) $\{1, 2\} \cap X = \{1, 2, 3\}$; b) $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3\}$; c) $X - \{2\} \subset \{0, 1\}$.

Rešenje

a) Jednačina nema rešenje.

b) Rešenje jednačine su skupovi: $X = \{3\}$, $X = \{1, 3\}$, $X = \{2, 3\}$ i $X = \{1, 2, 3\}$.

c) Rešenje jednačine su skupovi: $X = \emptyset$, $X = \{0\}$, $X = \{1\}$, $X = \{2\}$, $X = \{0, 2\}$ i $X = \{1, 2\}$.

Zadatak

Neka su dati sledeći podskupovi skupa celih brojeva Z: $A = \{x \mid x = 3n \text{ i } n \in Z \text{ i } n \geq 4\}$, $B = \{x \mid x = 2n \text{ i } n \in Z\}$, $C = \{x \mid x \in Z \text{ i } x^2 \leq 100\}$.

Koristeći ove skupove i skupovne operacije unija, presek i razlika specifikovati sledeće skupove:

a) Skup svih celih neparnih brojeva;

b) $\{-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$;

c) $\{x \mid x = 6n\,(n \in Z) \text{ i } n \geq 2\}$

d) $\{-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$.

e) Specifikovati skup $A - B$ navođenjem osobina svih njegovih elemenata.

Rešenje

Odredimo prvo šta su elementi skupova A, B i C.

– $A = \{12, 15, 18, 21, \ldots\}$;

– $B = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$;

– $C = \{-10, -9, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 9, 10\}$.

a) $Z - B$ ili $\bar{B}$.

b) $C \cap B = \{-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

c) $B \cap A = \{12, 18, 24, 30, \ldots\}$.

d) $C - B = \{-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$.

e) $A - B = \{x \mid x = 3 \cdot (2n - 1), n \in Z, n \geq 3\}$.

2.2.5 Preslikavanje između skupova

Korespondencija ili *preslikavanje* $a \mapsto b$ iz skupa A u skup B je pravilo kojim se *svakom* članu a skupa A dodeljuje *jedan* član b skupa B.

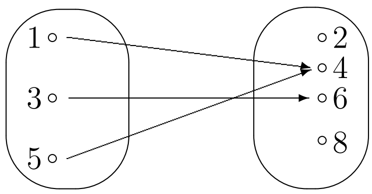
Korespondencija je $1 - 1$ ako je svaki član b skupa B dodeljen najviše jednom članu skupa A.

Ako ovaj uslov nije zadovoljen, dakle neki član skupa B je dodeljen više nego jednom članu skupa A, preslikavanje je $mnogo - 1$.

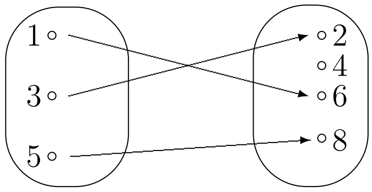
U opštem slučaju, preslikavanje iz A u B *mora* da uključuje sve članove skupa A ali *ne mora* da uključuje sve članove skupa B. Ako je *svaki* član skupa B dodeljen nekom članu skupa A, to je onda preslikavanje skupa A *na* skup B. U protivnom imamo preslikavanje skupa A *u* skup B.

Primer

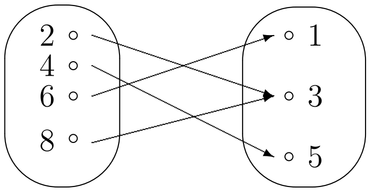
Neka je $L = \{1, 3, 5\}$, $M = \{2, 4, 6, 8\}$. Tada je preslikavanje $1 \mapsto 4$, $3 \mapsto 6$, $5 \mapsto 4$ mnogo-1 preslikavanje skupa L u skup M.



Preslikavanje $1 \mapsto 6$, $3 \mapsto 2$, $5 \mapsto 8$ je 1-1 preslikavanje skupa L u skup M.



Preslikavanje $2 \mapsto 3$, $4 \mapsto 5$, $6 \mapsto 1$ $8 \mapsto 3$ je mnogo-1 preslikavanje skupa M na skup L.



Jasno je da je 1-1 preslikavanje iz jednog na drugi konačan skup moguće samo ako su dva skupa iste veličine, to jest, ako imaju isti broj elemenata. Za beskonačne skupove za koje se pojam „iste veličine" ne može zasnivati na prebrojavanju, upravo se pojam preslikavanja „1-1 i na" koristi za poređenje njihovih veličina. Tako sledeća definicija pokriva i konačne i beskonačne skupove.

Definicija

Dva skupa su *iste veličine* ako i samo ako se može uspostaviti 1-1 preslikavanje iz jednog skupa na drugi.

Neka je $A = \{x \mid x \text{ je prirodan broj}\}$ a $B = \{x \mid x \text{ je prirodan paran broj}\}$. Moguće je uspostaviti 1-1 i na preslikavanje između skupova A i B na sledeći način: $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 6$, ... U opštem slučaju prirodni broj n preslikava se ovim preslikavanjem u paran prirodni broj $2n$. Ovo preslikavanje je 1-1 i na jer je svaki paran prirodni broj $2n$ iz skupa B slika *tačno jednog* prirodnog broja — a to je broj n — iz skupa A. Na osnovu toga i prethodne definicije zaključujemo da su skupovi A i B iste veličine iako je skup B pravi podskup skupa A ($B \subset A$).

Zadatak

Neka je $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$, $C = \{d, e, f\}$. Mogu li se uspostaviti sledeća preslikavanja:

a) 1-1 preslikavanje između skupova A i C?

b) 1-1 preslikavanje skupa A u skup B?

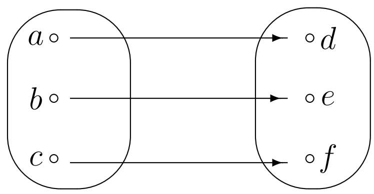
c) Mnogo-1 preslikavanje skupa B na skup C?

d) Mnogo-1 preslikavanje skupa A na neki podskup od C?

e) Mnogo-1 preslikavanje skupa A na skup B?

Rešenje

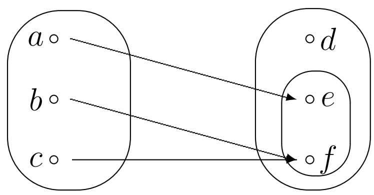
a) Da. Na primer,



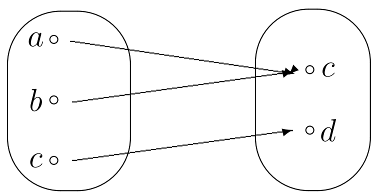
b) Ne, jer skup B ima manje elemenata.

c) Ne, jer skup B ima manje elemenata.

d) Da, na primer



e) Da, na primer



Zadatak

Odrediti sva preslikavanja skupa $\{a, b\}$ u skup $\{1, 2, 3\}$ i sva preslikavanja skupa $\{1, 2, 3\}$ u skup $\{a, b\}$. Označi ona preslikavanja koja su 1-1.

Rešenje

a)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^* \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^* \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^* \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^* \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^* \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^* \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & b & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & b & b \end{pmatrix}$$

Zadatak

Sledeća pravila definišu korespondenciju između skupa J svih pozitivnih i negativnih celih brojeva (bez 0) i nekog podskupa B od J ($B \subseteq J$). Odrediti taj podskup i utvrditi da li je preslikavanje između J i B 1-1 preslikavanje.

a) $a \mapsto |a| + 1$, $a \in J$;

b) $a \mapsto \frac{|a|}{a}$, $a \in J$.

Rešenje

a) $B = \{x \mid x \text{ je ceo broj i } x \geq 2\}$. Ovo preslikavanje nije 1-1 jer je, na primer, $1 \mapsto 1 + 1 = 2$ i $-1 \mapsto 1 + 1 = 2$, to jest, $2 \in B$ je slika dva broja iz skupa J;

b) $B = \{-1, 1\}$. Preslikavanje nije 1-1 jer je broj 1 slika svih pozitivnih brojeva iz skupa J a broj -1 slika svih negativnih brojeva iz skupa J.

2.3 Zadaci

2.3.1 Primer jednog testa

1. Skup A je specifikovan sledećim pravilima generisanja:

   (1) $1, -1 \in A$;

   (2) ako $x \in A$ i $x \geq 0$ onda i $x + 2 \in A$;
   ako $x \in A$ i $x < 0$ onda i $x - 2 \in A$

   (3) ništa drugo ne pripada skupu A.

   (a) Navesti nekih 8 elemenata koji pripadaju skupu A.

   (b) Specifikovati skup A navođenjem osobina svih njegovih elemenata.

2. Neka je N skup prirodnih brojeva, a Z skup celih brojeva. Odrediti (navesti elemente):

   (a) Skup $A = \{x \mid x \in N \text{ i } 1 \leq x < 7\}$;

   (b) Skup $B = \{x \mid x \in Z \text{ i } -5 < 3x - 1 \leq 2\}$;

   (c) Skup $C = \{x \mid x \in Z \text{ i } 2|x| + 5 \leq 9\}$;

   (d) $A \cap B$;

   (e) $B - C$;

   (f) $B \cup C$;

   (g) $(B \cap C) \cup (A - C)$.

3. Neka je skup $B = \{a, \{b\}\}$.

   (a) Navesti sve elemente skupa B;

   (b) Navesti sve podskupove skupa B.

4. Neka je dat skup $Q = \{a, \{b, c\}, c\}$. Koja su tvrđenja tačna:

   - $\{c\} \in Q$;
   - $c \in Q$;
   - $\{c, b\} \in Q$;
   - $\{b, c\} \subseteq Q$;
   - $\{\{b, c\}\} \subseteq Q$;
   - $b \in Q$;
   - $\{a, c\} \subseteq Q$;
   - $\mathcal{P}(Q)$ (partitivni skup od Q) ima 16 elemenata.

5. Zaokruži tačno tvrđenje:

   Raselov paradoks je pokazao:

   (a) da je teorija skupova nekorisna;

   (b) da je svaka osobina dobra da se pomoću nje specifikuje skup;

   (c) da se skup ne može specifikovati pomoću svake osobine skupa;

   (d) da neki skupovi nisu članovi samog sebe.

2.3.2 Rešenja zadataka

1. (a) $\{1, -1, 3, -3, 5, -5, 7, -7\} \subset A$;
   (b) $A = \{x \mid x \in Z$ i x neparan broj$\}$.

2. (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
   (b) $B = \{-1, 0, 1\}$;
   (c) $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
   (d) $A \cap B = \{1\}$;
   (e) $B - C = \emptyset$;
   (f) $B \cup C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
   (g) $(B \cap C) \cup (A - C) = \{-1, 0, 1\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{-1, 0, 1, 3, 4, 5, 6\}$.

3. (a) Elementi skupa B su: a i $\{b\}$;
   (b) Poskupovi skupa B su: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{\{b\}\}$ i $\{a, \{b\}\}$.

4.
   - $\{c\} \in Q$ — netačno;
   - $c \in Q$ — tačno;
   - $\{c, b\} \in Q$ — tačno;
   - $\{b, c\} \subseteq Q$ — netačno;
   - $\{\{b, c\}\} \subseteq Q$ — tačno;
   - $b \in Q$ — netačno;
   - $\{a, c\} \subseteq Q$ — tačno;
   - $\mathcal{P}(Q)$ (partitivni skup od Q) ima 16 elemenata — netačno.

5. Raselov paradoks je pokazao da se skup ne može specifikovati pomoću svake osobine skupa (odgovor (c)).

2.3.3 Zadaci za vežbu

1. Za sledeće skupove

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{\emptyset, \{B\}, \{\emptyset, B\}\} \\
A_2 &= \{B\} \\
A_3 &= \{\emptyset\} \\
A_4 &= \{\emptyset, \{B, \emptyset\}\} \\
A_5 &= \{\{B\}, \{\emptyset, B\}\} \\
A_6 &= \{B, \emptyset\}
\end{aligned}
$$

odrediti šta su sledeći skupovi:

a) $A_1 \cap A_4$;

b) $(A_2 \cup A_3) - A_6$;

c) $\mathcal{P}(A_6) \cap A_5$;

d) $A_4 - A_2$.

2. Za koje skupove X važi da je $\{a, b, c, d\} \cup X = \{a, b, c, d\}$?

3. Odrediti sve skupove X za koje važi:

$$X \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, X \cap \{2, 3, 4\} = \{3, 4\}$$

4. Odrediti elemente skupa C ako je $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e\}$, $A \cap B \cap C = \{a, d\}$, $A - C = \emptyset$ i $B - C = \{b, e\}$.

5. Dati su sledeći skupovi: $A = \{1, 8, 9, 10\}$, $B = \{x \mid x - 3 \in A\}$, $C = \{x \mid x + 2 \in B\}$. Odrediti skupove $A \cap B$ i $(C - A) \cup (A - C)$.

6. Dati su sledeći skupovi: $A = \{a, b, c, d, e\}$ i $B = \{d, e, f, g, h\}$. Odrediti skup X ako je $X \subset (A \cup B)$, $X \cap A = A - B$ i $X \cap B = B - A$.

7. Za sledeće skupove sastaviti definicije u obliku $\{x \mid \ldots\}$:

a) $K \cup L$;

b) $K \cap L$;

c) $K - L$;

d) $\mathcal{P}(\mathcal{K})$.

8. Dati su skupovi $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ i $C = \{3, 6, 9\}$. Da li se može uspostaviti:

a) 1-1 preslikavanje skupa C u skup A;

b) 1-1 preslikavanje skupa B u skup C;

c) preslikavanje skupa B na skup C;

d) 1-1 preslikavanje skupa C na podskup skupa B.

Ako je moguće, uspostaviti traženo preslikavanje.

9. Odgovori na sledeća pitanja i obrazloži odgovore:

a) Može li se uspostaviti 1-1 korespondencija iz skupa $\{x \mid x$ je ceo broj i $|x| \leq 100\}$ na skup $\{x \mid c$ je ceo broj i $0 \leq x \leq 100\}$?

b) Može li se uspostaviti 1-1 korespondencija iz skupa svih celih brojeva na skup svih nepozitivnih brojeva?

a) Može li se uspostaviti 1-1 korespondencija iz skupa svih ljudi na skup svih majki?

10. Sledeća pravila definišu korespondenciju između skupa J svih pozitivnih i negativnih celih brojeva (bez 0) i nekog podskupa B od J ($B \subseteq J$). Odrediti taj podskup, utvrditi da li je preslikavanje između J i B 1-1 preslikavanje i ako jeste uspostaviti ga:

    a) $a \mapsto a^2$, $a \in J$;

    b) $a \mapsto \frac{|a|}{a} \cdot a^2$, $a \in J$.

11. Da li su iste veličine skupovi $S = \{x \mid x$ je prirodni broj$\}$ i $T = \{x \mid x$ je paran prirodan broj$\}$?