Relacije, funkcije, beskonačni skupovi

Cvetana Krstev

March 14, 2013

2.5 Pojmovi zasnovani na teoriji skupova

2.5.1 Uređeni parovi i relacije

U matematici je *uređeni par* jednostavno par brojeva okruženih zagradama (a, b) gde je redosled u kome su brojevi navedeni od značaja: uređeni par $(3, 5)$ se razlikuje od uređenog para $(5, 3)$. Na primer, kada se crta tačka na grafikonu par $(1, 2)$ obično označava tačku koja je za jednu jedinicu mere desno od vertikalne ose i za dve jedinice mere iznad horizontalne ose. Uređeni parovi (i trojke, četvorke, i uopšteno govoreći, n-torke) su korisne za označavanje vrednosti dve ili više promenljivih bilo koje vrste; konvencijom se utvrđuje koja vrednost se odnosi na koju promenljivu. Kada se govori o skupu $\{a, b\}$ onda se govori o *neuređenom paru* jer su skupovi $\{a, b\}$ i $\{b, a\}$ isti.

Dekartov (Kartezijanov) proizvod skupova A i B, piše se $A \times B$ je skup svih uređenih parova (a, b) takvih da je $a \in A$ i $b \in B$. To se može izraziti na sledeći način:

$$A \times B = \{x \mid x = (a, b) \,\text{gde je}\, a \in A \,\text{i}\, b \in B\}$$

Primer

Neka je $C = \{0, 2, 4\}$ i $D = \{0, 1\}$. Onda je

$$C \times D = \{(0, 0), (0, 1), (2, 0), (2, 1), (4, 0), (4, 1)\}$$

Primetimo da je svaki skup uređenih parova podskup Dekartovog proizvoda neka dva skupa, u stvari beskonačnog broja takvih Dekartovih proizvoda.

Primer

Neka je $E = \{(a, d), (a, f), (c, f)\}$. E je podskup Dekartovog proizvoda skupova, na primer

$$F = \{a, b, c\}, G = \{d, e, f\}, \text{ ili}$$

$$F' = \{a, c, e\}, G' = \{d, e, f, g\}, \text{ ili}$$

$$F'' = \{a, c\}, G'' = \{d, f\}, \text{ ili } \ldots$$

Za dati skup R uređenih parova nekada je potrebno odrediti najmanji Dekartov proizvod čiji je R podskup. Najmanji A i B takvi da je $R \subseteq A \times B$ može se dobiti uzimajući da je

$$A = \{a \mid (a, b) \in R \,\text{za neko}\, b\}$$

$$B = \{b \mid (a,b) \in R \text{ za neko } a\}$$

Skupovi A i B nazivaju se projekcija skupa R na prvu, odnosno, drugu koordinatu.

Zadatak

Za dati skup uređenih parova $R = \{(1,3),(2,4),(4,3),(3,2),(1,5),(2,2),(2,7)\}$ naći najmanje skupove A i B takve da je $R \subseteq A \times B$. Koliko članova ima skup $A \times B$?

Rešenje

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3,4,5,7\}$. Skup $A \times B$ ima 20 članova.

Zadatak

Šta je skup $A \times B$ ako je:

a) $A = \{\emptyset\}$ i $B = \{a,b\}$?

b) $A = \emptyset$ i $B = \{a,b\}$?

Rešenje

a) $A \times B = \{(\emptyset,a),(\emptyset,b)\}$.

b) $A \times B = \emptyset$.

Ranije smo govorili da se relacije uspostavljaju između članova skupa. Pojam relacije može se formulisati unutar teorije skupova na sledeći način: skup R je binarna relacija ako je svaki element iz R uređeni par, to jest za svaki element $z \in R$ postoje x i y takvi da je $z = (x,y)$. Zapis $(x,y) \in R$ označava istu stvar kao prethodni zapis xRy.

Umesto da kao ranije govorimo o relaciji R na jednom skupu možemo govoriti o relaciji između članova skupa A i B koji odgovaraju prvom i drugom elementu uređenog para. Skupovi A i B mogu biti jednaki i samo tada se može govoriti o osobinama refleksivnosti, tranzitivnosti i simetričnosti.

Primer

Neka je K skup svih kamila a L skup svih ljudi. Tada je relacija $R =$„majka od" između K i L (kao i između L i K) prazan skup. Relacija $R' =$„ima više kopita od" između K i L je $K \times L$ dok je ta ista relacija između L i K prazan skup $\emptyset$.

Zadatak

Neka je S neki proizvoljan skup i neka je $\mathcal{P}(S)$ partitivni skup od S. Neka je R skup svih onih parova $(x,A) \in S \times \mathcal{P}(S)$ za koje je $x \in A$. Šta predstavlja ova relacija?

Rešenje

Ova relacija R je relacija „je član od" između *članova* od S i *podskupova* od S. Uzmimo za primer skup $S = \{a, b\}$. Njegov partitivni skup je $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Dekartov proizvod ova dva skupa je $S \times \mathcal{P}(S) = \{(a, \emptyset), (a, \{a\}), (a, \{b\}), (a, \{a, b\}), (b, \emptyset), (b, \{a\}), (b, \{b\}), (b, \{a, b\})\}$. S obzirom da relacija R sadrži samo one parove (x, A) za koje važi da je $x \in A$, odatle sledi da R sadrži parove $\{(a, \{a\}), (a, \{a, b\}), (b, \{b\}), (b, \{a, b\})\}$.

Projekcije od R na prvu i drugu koordinatu zovu se u slučaju relacije *domen* i *opseg* i definišu se na sledeći način: domen relacije R je $\{x \mid (x, y) \in R, \text{ za neko } y\}$ a opseg relacije R je $\{y \mid (x, y) \in R, \text{ za neko } x\}$.

Primer

Neka je $R = \{(x, y) \mid x \text{ je država u Evropi a } y \text{ je glavni grad od } x\}$. Tada je $\textit{domen}_R =$ skup svih evropskih država a $\textit{opseg}_R =$ skup svih evropskih glavnih gradova.

Primer

Neka je $R = \{(x, y) \mid x \text{ i } y \text{ su prirodni brojevi i } y = 2x\}$. Tada je $\textit{domen}_R =$ skup svih prirodnih brojeva $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ a $\textit{opseg}_R =$ skup svih parnih prirodnih brojeva $\{0, 2, 4, \ldots\}$.

Primer

Neka je relacija $R =$„dva puta veći od" definisana na skupu svih neparnih prirodnih brojeva. Tada je $\textit{domen}_R = \textit{opseg}_R = \emptyset$ jer je relacija $R = \emptyset$ pošto ne postoji *neparan* broj koji je dva puta veći od nekog drugog *neparnog* broja.

Ako je relacija $R \subseteq A \times B$, onda je njena inverzna relacija $R^{-1} \subseteq B \times A$ definisana na sledeći način: $R^{-1} = \{(b, a) \mid b \in B, a \in A, \text{i } (a, b) \in R\}$.

Primer

Neka je $H = \{9, 10, 11, 12\}$ i $J = \{3, 4, 5\}$. Relacija $R =$„jeste umnožak od" između skupova H i J je:

$$
\begin{aligned}
H \times J &= \{(9,3), (9,4), (9,5), (10,3), (10,4), (10,5), \\
&\quad (11,3), (11,4), (11,5), (12,3), (12,4), (12,5)\} \\
R &= \{(9,3), (10,5), (12,3), (12,4)\} \\
R &\subseteq H \times J
\end{aligned}
$$

Njena inverzna relacija je podskup Dekartovog proizvoda $J \times H$: $R^{-1} = \{(3, 9), (5, 10), (3, 12), (4, 12)\}$ ($R^{-1} =$„jeste delilac od").

2.5.2 Funkcije

Pojam funkcije je osnovni u svim granama matematike i uvek ima isto značenje. *Funkcija* $f : X \to Y$ je pravilo koje *svakom* elementu $x \in X$

dodeljuje *jedinstven* element y drugog skupa Y. Skup X je *domen* funkcije f. Element y koji se dodeljuje elementu $x \in X$ naziva se *vrednost* funkcije f u x. Skup Y je kodomen funkcije f. Funkcija f je jednoznačno određena svojim domenom, kodomenom i pravilom preslikavanja.

Ovo pravilo se može izraziti na više načina. Najelementarniji način je zadavanje liste vrednosti, kao na primer:

x	$f(x)$
1	1
2	17
3	48
4	33

Ovaj način je pogodan samo kada je domen konačan. Uobičajeno je, međutim, da se funkcija izrazi matematičkim izrazom kakav je, na primer, $f(x) = 2x+1$. Ovo pravilo bi se moglo rečima izraziti ovako: „Da bi se odredila vrednost funkcije f u x treba pomnožiti x sa 2 i dodati 1“. Iz definicija funkcije i preslikavanja vidi se da je funkcija pravilo kojim se uspostavlja preslikavanje.

U okviru teorije skupova, funkcija je profinjavanje definicije relacije; naime, funkcije su specijalna vrsta relacije. Funkcija iz skupa X u skup Y je relacija f takva da je $domen_f = X$ i takva da za svako $x \in X$ postoji jedinstven element $y \in Y$ takav da je $(x, y) \in f$.

Na primer, ako i X i Y označava skup svih ljudi, relacija xRy koja znači „y je otac od x“ je funkcija ali relacija $xR'y$ koja znači „y je brat od x“ nije (jer x može imati više braće a samo jednog oca).

Zahtev da element y bude jedinstven može se izraziti i na sledeći način: ako je $(x, y) \in f$ i $(x, z) \in f$ onda je $y = z$. Da bi se istaklo da su funkcije relacije mogli bismo da nastavimo da pišemo $(x, y) \in f$ umesto $y = f(x)$ ali ovo drugo je uobičajenije.

Primer

Relacija $R = \{(6, 24), (9, 2), (13, 24), (5, 2), (7, 24)\}$ jeste funkcija jer je svakom $x \in domen_R$ dodeljena samo jedna vrednost $y \in opseg_R$.

Relacija $R = \{24, 6), (2, 9), (24, 13), (2, 5), (24, 7)\}$ nije funkcija jer postoje elementi $x \in domen_R$ kojima je dodeljeno više vrednosti $y \in opseg_R$: to su elementi 24 i 2.

Relacija $R = \{(x, y) \mid x \text{ je neparno a } y \text{ je parno}\}$ nije funkcija, jer su svi uređeni parovi neparnih i parnih brojeva u relaciji, tj. $(3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 8), \ldots \in R$.

Relacija $R = \{(x, y) \mid x \text{ i } y \text{ su ljudi i } x \text{ je majka od } y\}$ nije funkcija jer majka x može imati više dece.

Posmatrajmo funkciju iz skupa X u skup Y. Da bi funkcija uopšte bila definisana svaki element od X mora biti uključen kao prvi član u jedan od uređenih parova odgovarajuće relacije. Svi drugi članovi ovih parova moraju biti elementi od Y ali svi elementi od Y ne moraju biti uključeni u ovim uređenim parovima. Ako jesu uključeni, to jest ako za svako $y \in Y$ postoji $x \in X$ takvo da je $y = f(x)$ onda funkcija preslikava X *na* Y. Skup elemenata od Y koji su vrednost nekog x je *opseg* funkcije f. Opseg funkcije f je ili skup Y ili neki njegov pravi podskup.

Ako je A podskup domena X onda je *slika* skupa A funkcijom f skup svih onih elemenata od Y koji su vrednost funkcije f u nekoj tački x iz A.

$$f(A) = \{y \mid y = f(x), \text{za neko } x \in A\}$$

Primer

Opseg funkcije $f(x) = x$ za $x \in A$ je skup A.

Opseg funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \geq 0 \text{ i } x \text{ je parno} \\ 1, & \text{ako je } x \geq 0 \text{ i } x \text{ je neparno} \end{cases}$$

koja je definisana na skupu X prirodnih brojeva je skup $\{0, 1\}$. Slika skupa $A = \{x \mid x \geq 0 \text{ i } x \text{ je neparno}\}$ funkcijom f je je skup $\{1\}$.

Neki važni primeri funkcija su:

1. *Jedinična funkcija* na skupu X je funkcija iz X na X koja je definisana sa $f(x) = x$ za svako $x \in X$.
2. *Projekcija* iz $X \times Y$ na X je funkcija iz skupa $X \times Y$ na skup X definisana sa $f(x, y) = x$ za svako $(x, y) \in X \times Y$.
3. *Karakteristična funkcija* podskupa A skupa X je funkcija f_k iz X na skup $\{0, 1\}$ definisana sa:

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in A \\ 0, & \text{ako je } x \in X - A \end{cases}$$

Primer

Neka je X skup svih takvih nenegativnih celih brojeva koji su umnošci broja 10: $\{0, 10, 20, 30, \ldots\}$. Ako je $A \subset X$ koji sadrži sve nenegativne cele brojeve koji su umnošci broja 30: $\{30, 60, 90, \ldots\}$ onda je karakteristična funkcija podskupa A skupa X:

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \geq 0 \text{ i } x \equiv 0 \pmod{30} \\ 0, & \text{ako je } x \geq 0 \text{ i } x \equiv 0 \pmod{10} \text{ ali } x \not\equiv 0 \pmod{30} \end{cases}$$

Funkcija je pravilo koje uspostavlja preslikavanje, odnosno korespondenciju. *1-1 funkcija* je ona funkcija koja uspostavlja 1-1 preslikavanje. Svaka 1-1 funkcija f, čiji je domen X a opseg Y, ima *inverznu funkciju*, piše se f^{-1}, koja je funkcija iz $opseg_f$ na X. Inverzna funkcija definiše se sa $f^{-1}(y) = x$ za koje je $f(x) = y$. Funkcija koja nije 1-1 nema inverznu funkciju jer bi za neko y postojalo više različitih x takvih da je $f(x) = y$, pa $f^{-1}(y)$ po definiciji ne bi bila funkcija.

Primer

Neka je relacija R definisana na sledeći način: $R = \{(x, y) \mid x$ je neparno i y je parno i $y = x+1\}$. Ova relacija *jeste* funkcija jer svakom $x \in X$ pri čemu je X skup svih neparnih (celih) brojeva odgovara tačno jedan broj — paran broj za jedan veći od njega. Uređeni parovi koji pripadaju ovoj relaciji su, na primer, $(1, 2), (3, 4), (5, 6), \ldots \in R$. *Domen* ove funkcije je skup svih neparnih celih brojeva a *opseg* je skup svih parnih celih brojeva većih od 0. Funkcija *jest* inverzna jer je svaki paran broj pridružen tačno jednom neparnom broju, onom koji je za jedan manji od njega. Relacija koja definiše ovu inverznu funkciju je $R' = \{(x, y) \mid x$ je parno i y je neparno i $y = x - 1\}$ i nju čine parovi $(2, 1), (4, 3), (5, 4), \ldots \in R'$.

Zadatak

Neka je $f : N \to N$ definisana na sledeći način: vrednost $f(x)$ je zbir cifara broja x.

a) Šta su vrednosti $f(5)$, $f(12)$, $f(253)$, $f(f(253))$?

b) Šta je rešenje jednačine $f(x) = 5$?

c) Da li je funkcija „na“?

d) Da li je funkcija 1-1?

Rešenje

a) $f(5) = 5$, $f(12) = 3$, $f(253) = 10$, $f(f(253)) = f(10) = 1$.

b) Rešenje jednačine $f(x) = 5$ je skup svih prirodnih brojeva čiji je zbir cifara 5: $\{5, 14, 41, 23, 32, 50, 104, 113, 122, 131, 140, \ldots\}$.

c) Funkcija jeste „na“ jer se za svaki prirodni broj iz N može odrediti broj iz N koji ima tačno taj zbir cifara. Npr. jedan broj čiji je zbir cifara 23 je 7772.

d) Funkcija nije 1-1 kao što pokazuje rešenje zadatka pod b).

Zadatak

Neka je data funkcija $f(x) = 7x - 1$ definisana na skupu realnih brojeva R.

a) Da li je funkcija 1-1?

b) Šta je njena inverzna funkcija?

Rešenje

a) U pitanju je linearna funkcija, a linearne funkcije su 1-1. Za 1-1 funkcije važi da ako su vrednosti funkcije jednake za dva realna broja x_1 i x_2, onda su ti brojevi jednaki. U ovom slučaju, ako je $7x_1 - 1 = 7x_2 - 1$, onda je $7x_1 = 7x_2$, pa prema tome $x_1 = x_2$.

b) Inverzna funkcija je $f^{-1}(x) = \frac{1}{7}x + \frac{1}{7}$.

Kao što se pojam uređenih parova može proširiti na pojam uređenih trojki, uređenih četvorki, i tako dalje, tako se i pojam relacije može proširiti sa binarnih na ternarne, i tako dalje, a pojam funkcije se može proširiti na funkcije dve promenljive, funkcije tri promenljive, i tako dalje. Funkcija dve promenljive $z = f(x, y)$ može se zapisati kao uređena trojka (x, y, z), funkcija tri promenljive $w = f(x, y, z)$ kao uređena četvorka (x, y, z, w) i, u opštem slučaju, funkcija n promenljivih $x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$ kao uređena $(n + 1)$-torka $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$.

Primer

Neka je relacija R definisana na sledeći način:

$$\begin{aligned} R \;=\; & \{(x, y, z) \mid x \text{ i } y \text{ su bilo koja dva cela broja i} \\ & z \text{ je veći od brojeva } x \text{ i } y, \text{ ako je } x \neq y \\ & z = x \text{ ako je } x = y\} \end{aligned}$$

Ova relacija jeste funkcija, na primer funkcija $z = max(x, y)$. Vrednost ove funkcije u (x, y) je veća od ove dve vrednosti, odnosno prva od njih ako su one jednake. Ova relacija sadrži, recimo, sledeće trojke:

$$\begin{aligned} (1, 1, 1) &\in R \\ (1, 2, 2) &\in R \\ (5, 3, 5) &\in R \end{aligned}$$

a ne sadrži ni trojku $(2, 5, 4)$ ni trojku $(2, 5, 2)$.

2.5.3 Kompozicija relacija i funkcija

Proizvod ili kompozicija dve relacije se definiše na sledeći način. Neka je relacija R uspostavljena između skupova A i B, a relacija S između skupova B i C, onda je kompozicija ove dve relacije $S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C$ i postoji $b \in B$ takvo da je $(a, b) \in R$ i $(b, c) \in S\}$.

Primer

Neka je relacija $R \subseteq \{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$ definisana sa $R = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 2)\}$, a relacija $S \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{x, y\}$ definisana sa $S = \{(1, y), (2, x), (3, x)\}$. Kompozicija relacija R i S je $S \circ R = \{(a, y), (a, x), (b, x)\}$.

Zadatak

Neka je relacija $R \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ definisana na sledeći način: $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$, a relacija $S \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2\}$ definisana sa $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$.

a) Šta je inverzna relacija R^{-1}?

b) Šta je inverzna relacija S^{-1}?

c) Šta je kompozicija relacija $S \circ R$?

d) Šta je inverzna relacija $(S \circ R)^{-1}$?

e) Šta je kompozicija relacija $R^{-1} \circ S^{-1}$?

Rešenje

a) $R^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (4, 2), (1, 3), (4, 3)\}$=$\{(1, 1), (1, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$.

b) $S^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$=$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 4)\}$.

c) $S \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$.

d) $(S \circ R)^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 3)\}$=$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$.

e) $R^{-1} \circ S^{-1}$=$\{(1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 2)\}$=$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$=$(S \circ R)^{-1}$.

Zadatak

Neka je relacija R definisana na skupu svih ljudi kao „roditelj od“, a relacija S sa „brat od“.

a) Šta je inverzna relacija R^{-1}?

b) Šta je inverzna relacija S^{-1}?

c) Šta je kompozicija relacija $R \circ S$?

d) Šta je kompozicija relacija $R \circ R$?

e) Šta je kompozicija relacija $S^{-1} \circ R^{-1}$?

Rešenje

a) R^{-1} je relacija „dete od“.

b) S^{-1} je relacija „brat ili sestra od“.

c) $R \circ S =$ je relacija „stric ili ujak od“ (jer je a brat od b, a b je roditelj od c).

d) $R \circ R$ je relacija „baba ili deda od“.

e) $S^{-1} \circ R^{-1}$ je relacija „bratanac (bratanica) ili sestrić (sestričina) od“ (jer je a dete od b, a b je brat ili sestra od c).

Kompozicija ili slaganje funkcija $f : A \to B$ i $g : B \to C$ je funkcija $g \circ f : A \mapsto C$ koja se definiše na sledeći način:

$$g \circ f = \{(a, c) \mid \text{ postoji } b \in B \text{ takvo da je } (a, b) \in f \text{ i } (b, c) \in g\}$$

Pošto za svako $a \in A$ postoji jedinstveno b takvo da je $(a, b) \in f$ i za svako $b \in B$ postoji jedinstveno c takvo da je $(b, c) \in g$ sledi da za svako $a \in A$ postoji jedinstveno c koje pripada ovako definisanom skupu $g \circ f$ te on predstavlja funkciju. Kompozicija funkcija $g \circ f$ se piše još i $c = g(f(a))$. Prema definiciji inverzne funkcije sledi da je $f^{-1}(f(x)) = x$.

Primer

Neka su date funkcije $f(x) = 2x + 5$ i $g(x) = 5x + 3$. Onda je:

$$\begin{aligned}
(f \circ f) &= & 2(2x + 5) + 5 &= & 4x + 10 + 5 &= & 4x + 15 \\
(f \circ g) &= & 2(5x + 3) + 5 &= & 10x + 6 + 5 &= & 10x + 11 \\
(g \circ f) &= & 5(2x + 5) + 3 &= & 10x + 25 + 3 &= & 10x + 28 \\
(g \circ g) &= & 5(5x + 3) + 3 &= & 25x + 15 + 3 &= & 25x + 18
\end{aligned}$$

2.5.4 Sekvencije

Sekvencija je funkcija čiji je domen ili konačni podskup prirodnih brojeva $\{0, 1, \ldots, n\}$ ili skup svih prirodnih brojeva a opseg je ma koji skup.

Prema konvenciji, ako je domen skup $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ za neko n sekvencija se specifikuje ispisivanjem redom njenih vrednosti u tačkama $0, 1, \ldots, n$. Na primer, ako je sekvencija definisana funkcijom $f(x) = 3x$ na domenu $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ onda bismo tu funkciju, koja je vrsta relacije, mogli da zapišemo u obliku skupa uređenih parova: $\{(0, 0), (1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$. Prema konvenciji se, međutim, sekvencija piše jednostavno $0, 3, 6, 9, 12$. Kada promenljive zamenjuju članove sekvencije onda su one *indeksirane*: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ za konačne sekvencije i $x_0, x_1, x_2, \ldots$ za beskonačne sekvencije.

Sekvencije se obično zadaju definisanjem vrednosti člana x_i u zavisnosti od i. Na primer,

$$x_i = \begin{cases} 2i, & \text{za parne } i \text{ i } i \leq 100 \\ -2i, & \text{za neparne } i \text{ i } i \leq 99 \end{cases}$$

Ovim je definisana sekvencija $0, -2, 4, -6, 8, \ldots, -198, 200$.

Sekvencije se često zadaju i definisanjem vrednosti člana x_i u zavisnosti od vrednosti članova sekvencije koji mu prethode, na primer, x_{i-1}. Tako

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{za } i = 0 \\ 3x_{i-1} + 1, & \text{za } i > 0 \end{cases}$$

definiše sekvenciju $0, 1, 4, 13, 40, \ldots$.

Primer

Prvih sedam članova sekvencije $x_i = 3i + 1$, za $i \geq 0$ su $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19$. Prvih sedam članova sekvencije $x_i = max(i, 3)$, za $i \geq 0$ su $3, 3, 3, 3, 4, 5, 6$.

Sekvencija definisana na sledeći način:

$$f_i = \begin{cases} 1, & \text{za } i = 0, 1 \\ f_{i-2} + f_{i-1}, & \text{za } i > 1 \end{cases}$$

poznata je pod nazivom *Fibonačijev niz*. U toj sekvenciji je svaki član (osim prva dva) jednak zbiru prethodna dva člana sekvencije. Prvih nekoliko članova ove sekvencije su: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$.

2.6 Pojam konačnog i beskonačnog skupa

Uobičajena definicija konačnosti i beskonačnosti zasniva se na intuiciji da je konačan skup onaj čije je članove moguće prebrojati. Odavde sledi stroga definicija:

Definicija

Skup S je *konačan* ako postoji prirodan broj n takav da je moguće uspostaviti 1-1 preslikavanje između elemenata skupa S i skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1\}$.

Skup S je *beskonačan* ako nije konačan.

Ovi pojmovi mogu se definisati na alternativan ali ekvivalentan način koji je formulisao Dedekind. On proističe iz činjenice da se, recimo, može uspostaviti 1-1 korespondencija između skupa svih nenegativnih celih brojeva $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ i skupa svih parnih nenegativnih celih brojeva $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$. Pravilo koje uspostavlja korespondenciju je funkcija $f(n) = 2n$.

Definicija

Skup S je *beskonačan* ako se može uspostaviti 1-1 preslikavanje između elemenata skupa S i nekog njegovog pravog podskupa.

Skup S je *konačan* ako nije beskonačan.

Ove dve definicije nazivaju se *Dedekindova definicija beskonačnosti* i *Dedekindova definicija konačnosti.*

Za dva skupa između kojih se može uspostaviti 1-1 korespondencija kaže se da imaju isti *kardinalni broj.* Za skup koji može da uspostavi korespondenciju sa skupom prirodnih brojeva kaže se da ima isti kardinalni broj kao skup prirodnih brojeva ili da mu je kardinalnost *alef-0.*

Kardinalnost alef-0 ima, na primer, skup celih brojeva: korespondencija 1-1 se može uspostaviti između skupa celih brojeva i skupa prirodnih brojeva na sledeći način: $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, $-1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $-2 \mapsto 4$, ... Pravilo koje uspostavlja korespondenciju je funkcija

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{ako je } n \text{ neparan ceo broj} \\ -\frac{n}{2}, & \text{ako je } n \text{ paran ceo broj} \end{cases}$$

Kardinalnost alef-0 ima i skup svih racionalnih brojeva iako intuitivno izgleda da njih ima mnogo više. Međutim može se uspostaviti 1-1 korespondencija između skupa svih prirodnih i svih racionalnih brojeva, na primer, na sledeći način:

$$
\begin{array}{lllllllllllll}
\frac{1}{1} & \swarrow & \frac{2}{1} & \swarrow & \frac{3}{1} & \swarrow & \frac{4}{1} & \swarrow & \frac{5}{1} & \swarrow & \frac{6}{1} & \swarrow & \dots \\
\frac{1}{2} & \swarrow & \frac{2}{2} & \swarrow & \frac{3}{2} & \swarrow & \frac{4}{2} & \swarrow & \frac{5}{2} & \swarrow & \dots & & \\
\frac{1}{3} & \swarrow & \frac{2}{3} & \swarrow & \frac{3}{3} & \swarrow & \frac{4}{3} & \swarrow & \dots & & & & \\
\frac{1}{4} & \swarrow & \frac{2}{4} & \swarrow & \frac{3}{4} & \swarrow & \dots & & & & & & \\
\frac{1}{5} & \swarrow & \frac{2}{5} & \swarrow & \dots & & & & & & & & \\
\frac{1}{6} & \swarrow & \dots & & & & & & & & & & \\
\dots & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Prvo se uspostavlja korespondencija između elemenata ovog niza i pozitivnih celih brojeva na sledeći način: počinje se u gornjem levog uglu a zatim se prebrojavaju redom dijagonale od gornjeg reda do leve kolone. Prvih nekoliko članova korespondencije su:

$$\frac{1}{1} \mapsto 1, \frac{2}{1} \mapsto 2, \frac{1}{2} \mapsto 3, \frac{3}{1} \mapsto 4, \frac{2}{2} \mapsto 5, \frac{1}{3} \mapsto 6, \frac{4}{1} \mapsto 7, \dots$$

Zatim se može uspostaviti korespondencija između svih negativnih racionalnih brojeva i negativnih celih brojeva, 0 i 0 a zatim se može primeniti već uvedena procedura koja preslikava cele brojeva u prirodne da bi se dobila 1-1 korespondencija između svih racionalnih brojeva i svih prirodnih brojeva.

Uspostavljanje 1-1 korespondencije između članova nekog skupa i prirodnih brojeva pomoću neke dobro definisane procedure kao što je ova naziva se *efektivno nabrajanje* svih članova skupa, pa su to *prebrojivo beskonačni skupovi.*

Pošto se utvrdi da je skup racionalnih brojeva iste veličine kao i skup prirodnih brojeva može se steći utisak da su svi beskonačni skupovi iste veličine. To, ipak, nije slučaj i može se pokazati da su sledeći skupovi veći od skupa prirodnih brojeva:

a) Skup realnih brojeva ima kardinalnost veću od skupa prirodnih brojeva. Šta više skup realnih brojeva x iz intervala $0 \leq x < 1$ je veći od skupa prirodnih brojeva;

b) Partitivni skup prirodnih brojeva $\mathcal{P}(N)$;

Skupovi koji imaju kardinalnost alef-0 nazivaju se *prebrojivo beskonačni.* Skupovi koji nisu prebrojivi nazivaju se *neprebrojivo beskonačni.* Svi navedeni skupovi koji su veći od skupa prirodnih brojeva su neprebrojivo beskonačni i imaju istu kardinalnost — kardinalnost *kontinuuma c.*

Zadatak

Neka postoji hotel u kome ima beskonačno, ali prebrojivo, mnogo jednokrevetnih soba koje su numerisane brojevima $1, 2, 3, \ldots$. U subotu veče hotel je pun, to jest sve sobe su popunjene. Dolazi Petar Petrović i traži sobu. Uslužni vlasnik hotela moli svakog gosta da se iz svoje sobe čiji je broj n preseli u sobu čiji je broj $n+1$. Na taj način soba 1 ostaje prazna i u nju se useljava Petar Petrović.

U nedelju veče hotel je i dalje pun. Ulazi i traži smeštaj fudbalski tim sa beskonačno, ali prebrojivo, mnogo igrača čiji su brojevi dresova $1, 2, 3, \ldots$. Kako bi ih uslužni vlasnik hotela mogao smestiti?

Rešenje

Uslužni vlasnik hotela bi zamolio svakog gosta da se preseli iz svoje sobe čiji je broj n u sobu čiji je broj $2n$. Tako ostaju prazne sve sobe čiji je broj neparan. Sada vlasnik hotela može zamoliti svakog člana fudbalskog tima da se useli u sobu čiji broj zavisi od njegovog broja dresa: ako je broj njegovog dresa m, on treba da se useli u sobu čiji je broj $2m - 1$.

2.7 Zadaci

Primer jednog testa

1. (a) Za date skupove A, B, C i D izračunati Dekartove proizvode $A \times B$ i $C \times D$.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c\}, C = \{1, 2, 3\}, D = \{a, b, c, d\}$$

(b) Za relacije $R \subseteq A \times B$ i $T \subseteq A \times B$ odrediti njihove komplemente R' i T' u odnosu na skup $A \times B$:

$$R = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}, T = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$

(c) Za relacije $S \subseteq C \times D$ i $V \subseteq C \times D$ odrediti njihove komplemente S' i V' u odnosu na skup $C \times D$:

$$S = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}, V = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$

(d) Odrediti koje od relacija R, T, R' i T', S, V, S' i V' su funkcije (D/N):

$$\begin{array}{ll} R : A \to B; T : A \to B; & R' : A \to B; T' : A \to B \\ S : C \to D; V : C \to D; & S' : C \to D; V' : C \to D \end{array}$$

(e) Da li među funkcijama ima "1-1" funkcija i koje su (ako ih ima)? Da li među funkcijama ima "na" funkcija i koje su (ako ih ima)? Obrazložiti odgovor.

(Napomena: Komplement E' skupa E u odnosu na skup F je skup $F - E$.)

2. Neka je R relacija između skupova $\{m,n,p\}$ i $\{m,n,p,q\}$ definisana sa $R = \{(m,m),(n,p),(n,q),(p,m),(p,q)\}$, a neka je relacija $S = \{(m,m),(m,n),(n,m),(p,m),(q,n)\}$ definisana između skupova $\{m,n,p,q\}$ i $\{m,n\}$. Odrediti:

   (a) R^{-1};

   (b) S^{-1};

   (c) $S \circ R$;

   (d) $(S \circ R)^{-1}$;

   (e) $R^{-1} \circ S^{-1}$;

   (f) Kakvi su skupovi $(S \circ R)^{-1}$ i $R^{-1} \circ S^{-1}$?

3. Neka je sekvencija definisana sa: $x_0 = 0, x_{n+1} = 1 - x_n$, n je ceo nenegativan broj.

   a) Odrediti prvih 8 elemenata sekvencije.

   b) Po definiciji, svaka sekvencija je funkcija: šta je domen, a šta opseg date sekvencije?

   c) Da li je funkcija "1-1"? Obrazložiti odgovor.

Rešenja zadataka

1. a)

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c),(4,a),(4,b),(4,c),(5,a),(5,b),(5,c)\}$$

   b)

$$C \times D = \{(1,a),(1,b),(1,c),(1,d),(2,a),(2,b),(2,c),(2,d),(3,a),(3,b),(3,c),(3,d)\}$$

c)

$$\begin{aligned} R' = (A \times B) - R \quad &= \{(1,b),(1,c),(2,b),(2,c),(3,b),(3,c),\\ &\quad (4,a),(4,b),(4,c),(5,a),(5,b),(5,c)\}\\ T' = (A \times B) - T \quad &= \{(1,b),(1,c),(2,a),(2,c),(3,a),(3,b),\\ &\quad (4,a),(4,b),(4,c),(5,a),(5,b),(5,c)\}; \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} S' = (C \times D) - S \quad &= \{(1,b),(1,c),(1,d),(2,b),(2,c),(2,d),\\ &\quad (3,b),(3,c),(3,d)\}\\ V' = (C \times D) - V \quad &= \{(1,b),(1,c),(1,d),(2,a),(2,c),(2,d),\\ &\quad (3,a),(3,b),(3,d)\}; \end{aligned}$$

e)

$$\begin{array}{ll} R : A \to B;\ \mathbf{N}\ T : A \to B;\ \mathbf{N} & R' : A \to B;\ \mathbf{N}\ T' : A \to B\ \mathbf{N}\\ S : C \to D;\ \mathbf{D}\ V : C \to D;\ \mathbf{D} & S' : C \to D;\ \mathbf{N}\ V' : C \to D\ \mathbf{N} \end{array}$$

f) Funkcije je relacija V (svako y iz D je slika najvise jednog x iz C i definisana je na celom skupu A). Funkcija V nije "na" jer se ni jedan element iz C ne slika u $d \in D$.

2. (a) $R^{-1} = \{(m,m),(p,n),(q,n),(m,p),(q,p)\}$;
   (b) $S^{-1} = \{(m,m),(n,m),(m,n),(m,p),(n,q)\}$;
   (c) $S \circ R = \{(m,m),(m,n),(n,m),(n,n),(p,m),(p,n)\}$;
   (d) $(S \circ R)^{-1} = \{(m,m),(n,m),(m,n),(n,n),(m,p),(n,p)\}$;
   (e) $R^{-1} \circ S^{-1} = \{(m,m),(m,p),(n,m),(n,p),(m,n),(n,n)\}$;
   (f) Skupovi su identični.

3. a) $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1$;
   b) Domen je skup prirodnih brojeva, a opseg je skup $\{0, 1\}$;
   c) Funkcija nije "1-1". Svi parni projevi se preslikavaju u 0, a svi neparni u 1.

Zadaci za vežbu

1. Šta su domen i opseg sledećih relacija:

   a) $R = \{(x, y) \mid x \in S, y \in S \text{ i } x = y\}$;
   b) $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, c)\}$;
   c) $R =$„manje od“ na skupu nenegativnih celih brojeva $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

2. Neka je $E = \{x \mid x \geq 0 \text{ i } x \text{ je parno}\}$ i $O = \{x \mid x \geq 0 \text{ i } x \text{ je neparno}\}$. Rečima izraziti relaciju između skupova E i O koja:

   a) je prazna;
   b) nije prazna;

3. Za sledeća tvrđenja odgovori da li su tačna ili netačna i obrazloži odgovor:

   a) Svaka relacija R između A i B je podskup od $A \times B$;
   b) $\emptyset$ je član svake relacije R;
   c) $\emptyset$ je podskup svake relacije R;
   d) $\emptyset$ je relacija;
   e) A je podskup od $A \times B$ za svaka dva skupa A i B.

4. Šta je opseg funkcije $f(x) = x \ (mod\ 2)$ definisane na skupu celih brojeva. Da li je to karakteristična funkcija? Ako jeste, kog podskupa celih brojeva je $f(x)$ karakteristična funkcija?

5. Koje od sledećih relacija su funkcije dve promenljive:

   a) $R = \{(x, y, z) \mid x$ je neparno, y je parno i
      z je umnožak od $10\}$;
   b) $R = \{(x, y, z) \mid x$ je ime nekog grada u Evropi,
      y je ime neke države u Evropi, a
      z je “da” ako je grad x u državi y, inače je “ne”.$\}$

6. Koje od sledećih relacija su funkcije:

   a) $R = \{(x, y) \mid x \text{ je neparno }, y \text{ je parno }, y = 2x\}$;
   b) $R = \{(x, y) \mid x \text{ je ceo broj}, y = 3\}$;
   c) $R = \{(x, y) \mid x \text{ i } y \text{ su ljudi i } y \text{ je majka od } x\}$;
   d) $R = \{(x, y) \mid x \text{ i } y \text{ su ljudi i } y \text{ je potomak od } x\}$;

Za relacije koje su funkcije odrediti domen i opseg. Za funkcije koje su 1-1 odrediti inverznu funkciju.

7. Neka je S skup svih nenegativnih celih brojeva deljivih sa 5 ($S = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$), i neka je $T \subset S$ skup koji sadrži sve nenegativne cele brojeve koji su deljivi sa 10 ($T = \{10, 20, 30, 40, \ldots\}$). Šta je karakteristična funkcija podskupa T skupa S?

8. Zapisati prvih sedam članova sekvencije definisane sa:

   a) $x_i = i + 1$ za $x \geq 0$;

   b) $x_i = \begin{cases} 2i, & \text{za } 0 \leq i \leq 2 \\ 2i + 1, & \text{za } i > 2 \end{cases}$

   c) $x_i = \begin{cases} 1, & \text{za } i = 0 \\ x_{i-1}^2 + 1, & \text{za } x > 1 \end{cases}$

9. Šta je opseg funkcije:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} - 1, & \text{za } x > 0 \\ \frac{|x|}{x} + 2, & \text{za } x < 0 \\ x, & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

za ceo broj x. Da li je to karakteristična funkicja? Ako jeste, kog podskupa celih brojeva je $f(x)$ karakteristična funkcija?