Operacije i relacije na skupovima

Cvetana Krstev

December 20, 2012

2.4 Operacije i relacije na elementima

2.4.1 Operacije na skupu

Unarna operacija na elementima ili članovima skupa (ili, unarna operacija na skupu) je pravilo koje dodeljuje *svakom* članu skupa *tačno jedan* član *istog* skupa koji ne mora biti od njega različit.

Binarna operacija na skupu je pravilo koje dodeljuje *svakom* paru članova skupa *tačno jedan* član istog skupa. Na primer, neka binarna operacija na skupu $\{a, b\}$ mora da dodeli ili a ili b svakom od četiri moguća para (a, a), (a, b), (b, a), (b, b). Treba naglasiti da parovi (a, b) i (b, a) nisu isti i da im operacija može dodeliti različite vrednosti. Slično bi se definisala ternarna operacija (za svaka tri elementa skupa) ili n-arna operacija (za svakih n elemenata skupa).

Primer

Na skupu svih neparnih celih brojeva uobičajeno množenje je dobro definisana operacija, jer za *bilo koja* dva neparna cela broja postoji *jedan* ceo broj koji je njihov proizvod a i taj proizvod je *uvek* neparan. Uobičajeno sabiranje nije dobro definisana operacija na ovom skupu jer je zbir dva neparna cela broja uvek paran broj koji više nije član istog skupa.

Zadatak

Koji od sledećih skupova i operacija zadovoljavaju definiciju operacije na skupu:

a) Skup svih celih brojeva i množenje;

b) Skup nenegativnih celih brojeva i oduzimanje;

c) Skup svih celih brojeva i deljenje;

d) Skup svih celih brojeva i kvadratni koren;

Rešenje

a) Da, jer se svaka dva cela broja mogu pomnožiti a rezultat je uvek ceo broj;

b) Ne, jer razlika dva nenegativna cela broja može biti negativan broj koji nije u skupu. Na primer, $3 - 5 = -2$;

c) Ne, jer količnik dva cela broja ne mora biti ceo broj, na primer $3 : 5$, i količnik nije definisan za sve parove jer deljenje sa nulom nije definisano;

d) Ovo je unarna operacija koja ne zadovoljava definiciju operacije na skupu celih brojeva jer kvadratni koren iz celog broja ne mora biti ceo broj, na primer $\sqrt{2}$, i kvadratni koren nije definisan za negativne brojeve.

2.4.2 Osobine binarnih operacija

Binarne operacije, i samo one, mogu imati jednu, ili obe, ili ni jednu od sledećih osobina. Binarna operacija, označimo je sa $\cdot$, je *asocijativna* ako za svako a, b i c koji ne moraju biti različiti važi:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Binarna operacija $\cdot$ je *komutativna* ako za svako a i b važi

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Primer

Uobičajeno množenje je komutativna operacija jer važi da je $a \times b = b \times a$ za svako a i b (iz skupa prirodnih, celih, racionalnih, ... brojeva) i asocijativna jer važi $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ za svako a, b i c.

Deljenje nije komutativna operacija jer ne važi da je $a : b = b : a$ za svako a i b. Na primer, $6 : 2 = 3$ a $2 : 6 = 1/3$. Takođe, operacija nije ni asocijativna jer ne važi da je $(a : b) : c = a : (b : c)$ za svako a, b i c. Na primer, $(24 : 2) : 2 = 6$ a $24 : (2 : 2) = 24$.

Zadatak

Da li je operacija stepenovanja na skupu nenegativnih celih brojeva komutativna i asocijativna?

Rešenje

Operacija stepenovanja nije komutativna jer za svaka dva cela broja a i b ne važi da je $a^b = b^a$. Na primer, $2^3 \neq 3^2$ jer je $8 \neq 9$. Takođe, operacija nije ni asocijativna jer za svaka tri cela broja a, b i c ne važi da je $(a^b)^c = a^{(b^c)}$. Naime, $(a^b)^c = a^{(b \cdot c)}$, a, u opštem slučaju je $b \cdot c \neq b^c$.

Zadatak

Neka je operacija $\odot$ definisana na skupu $\{a, b\}$ sledećim dijagramom:

	$x \odot y$	y: a	b
x	a	a	a
	b	b	b

Da li je ova operacija komutativna i asocijativna?

Rešenje

Operacija nije komutativna jer je, na primer, $a \odot b = a$ a $b \odot a = b$. Operacija jeste asocijativna jer je, na primer, $(a \odot a) \odot a = a \odot (a \odot a) = a$ i $(a \odot a) \odot b = a \odot (a \odot b) = a$ i tako dalje. Uopšteno, operacija je asocijativna jer rezultat izračunavanja uvek zavisi, bez obzira na redosled izračunavanja, od prvog člana u izrazu.

2.4.3 Relacije na skupu

Da bi *binarna relacija* R bila definisana na skupu S neophodno je da za svaka dva elementa a i b iz skupa S koji ne moraju biti različiti važi da je ili a u relaciji R sa b, a zapisuje se aRb, ili a nije u relaciji R sa b. Na sličan način mogu se definisati i n-arne relacije. Primeri binarnih relacija su:

- $R =$„kvadratni koren od" je relacija na skupu celih brojeva. Na primer, $5R25$ (jer je $5 = \sqrt{25}$) dok 4 nije u relaciji R sa 20 (jer $4 \neq \sqrt{20}$).

- $R =$„brat od" je relacija na skupu svih ljudi jer se za svaka dva čoveka može reći da li su braća ili ne.

Na skupu celih brojeva „inteligentniji od" nije relacija jer se ne može reći ni da je broj 3 inteligentniji od broja 4 ni da je broj 4 inteligentniji od broja 3.

2.4.4 Osobine binarnih relacija

Relacija R na skupu S je *refleksivna* ako za svaki element x iz skupa S važi da je xRx.

Na primer, relacija „ima istu boju kose kao" je refleksivna na skupu svih ljudi. Relacija „manje od" nije refleksivna na skupu celih brojeva jer ni za jedan ceo broj ne važi da je manji od samog sebe.

Relacija R na skupu S je *tranzitivna* ako za svaka tri elementa x, y i z koja ne moraju biti različita važi da ako je xRy i yRz onda je i xRz.

Na primer, tranzitivne su sledeće relacije:

- Relacija $R =$„stariji od“ na skupu svih ljudi je tranzitivna jer ako je osoba a starija od osobe b i ako je osoba b starija od osobe c onda je i osoba a starija od osobe c i to važi za ma koje tri osobe iz skupa svih ljudi.

- Relacija $R =$„manje od“ na skupu svih celih brojeva je tranzitivna jer ako za brojeve $a, b, c \in Z$ važi da je $a < b$ i $b < c$ onda važi i da je $a < c$ i to važi za ma koja tri cela broja a, b, c.

Sledeće relacije nisu tranzitivne:

- Relacija $R =$„otac od“ na skupu svih ljudi nije tranzitivna jer ako je osoba a otac osobe b i osoba b otac osobe c onda osoba a nije otac (već deda) osobe c.

- Relacija $R =$„godinu dana stariji od“ na skupu svih ljudi nije tranzitivna jer ako je osoba a godinu dana starija od osobe b i osoba b godinu dana starija od osobe c onda osoba a nije godinu dana (već dve godine) starija od osobe c.

Relacija R na skupu S je *simetrična* ako za svaka dva elementa x i y iz S važi da ako je xRy onda je i yRx.

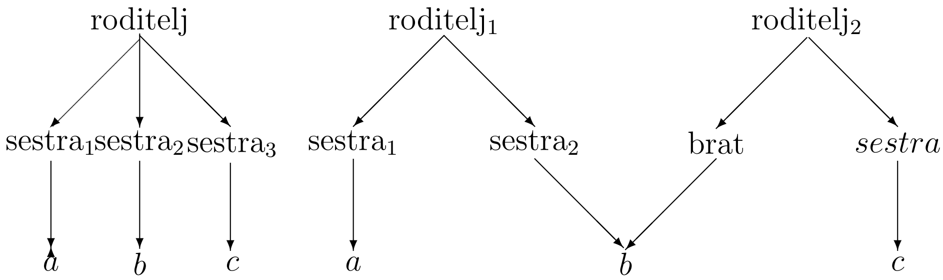
Na primer,

- Relacija $R =$„jednako“ na skupu celih brojeva je simetrična jer ako za brojeve $x, y \in Z$ važi da je xRy (odnosno $x = y$) onda važi da je i yRx (odnosno $y = x$) i to važi za svaka dva cela broja x i y.

- Relacija $R =$„otac od“ na skupu svih ljudi nije simetrična jer ako za osobu a važi da je otac osobe b onda osoba b nije otac (već sin ili ćerka) osobe a.

Skup na kome je relacija definisana može da utiče na osobine koje relacija ima. Na primer, relacija „sestra od“ je simetrična na skupu svih žena jer ako je osoba a sestra osobe b onda važi i da je osoba b sestra osobe a i to važi za ma koje dve osobe a, b iz skupa žena. Međutim, relacija „sestra od“ nije simetrična na skupu svih ljudi jer ako je osoba a sestra osobe b onda osoba b može ali ne mora biti sestra osobe a (može biti i brat osobe b).

Relacija koja nije refleksivna može biti *irefleksivna* ili *nerefleksivna*. Relacija je *irefleksivna* na skupu S ako ni za jedno $x \in S$ ne važi da je xRx. Na



Slika 2.4: Dijagram levo: a, b i c su ćerke rođenih sestara i važi aRb, bRc i aRc; Dijagram desno: a i b su ćerke rođenih sestara, a b i c su ćerke rodjenog brata i sestre i važi aRb, bRc ali ne važi aRc

primer, irefleksivna je relacija „manje od" na skupu svih celih brojeva jer ni za jedan ceo broj x ne važi da je $x < x$. Takođe je irefleksivna i relacija „otac od" na skupu svih ljudi jer ni jedna osoba a nije otac samom sebi. Relacija je *nerefleksivna* na skupu S ako nije ni refleksivna ni irefleksivna a to znači da postoji $x \in S$ takvo da je xRx ali postoji i $y \in S$ takvo da ne važi da yRy. Primer nerefleksivne relacije na skupu ljudi je $R =$„izdržava" jer neka osoba x izdržava sama sebe, dakle važi da je xRx dok neka druga osoba y ne izdržava sama sebe, dakle ne važi da je yRy.

Za refleksivne relacije dakle važi da je svako x iz skupa u relaciji sa samim sobom, za irefleksivne važi da ni jedno x iz skupa nije u relaciji sa samim sobom dok za nerefleksivne relacije postoje elementi skupa koji su relaciji sa samim sobom ali postoje i takvi elementi skupa koji nisu u relaciji sa samim sobom.

Relacija koja nije tranzitivna može biti *itranzitivna* ili *netranzitivna*. Relacija je *itranzitivna* na skupu S ako za svako $x, y, z \in S$ važi da ako je xRy i yRz onda nije xRz. Na primer, itranzitivna je relacija „godinu dana stariji od" na skupu svih ljudi, jer ako je osoba a godinu dana starija od osobe b a osoba b godinu dana starija od osobe c onda je osoba a dve godine starija od osobe c i to važi za svake tri osobe a, b, c iz skupa svih ljudi. Relacija je *netranzitivna* na skupu S ako nije ni tranzitivna ni itranzitivna, to jest ako postoje elementi $x, y, z \in S$ takvi da je xRy i yRz i xRz i postoje elementi $a, b, c \in S$ takvi da je aRb i bRc i ne važi da je aRc. Primer netranzitivne relacije je „x ima sestru od tetke y" na skupu svih ljudi kao što pokazuje dijagram sa slike 2.4.

Za tranzitivne relacije dakle važi da ako je xRy i yRz možemo tvrditi da je xRz. Za itranzitivne relacije važi da ako je xRy i yRz možemo da tvrdimo da nije xRz. Kod netranzitivnih relacija iz činjenice da je xRy i yRz ne sledi automatski ni da jeste xRz ni da nije xRz.

Relacija koja nije simetrična može biti *asimetrična* ili *nesimetrična*. Relacija je *asimetrična* na skupu S ako za svako $x, y \in S$ važi da ako je xRy onda ne nije yRx. Na primer, relacija „stariji od" na skupu svih ljudi je asimetrična jer ako je osoba x starija od osobe y onda nikada osoba y nije starija od osobe x (već je mlađa). Relacija je *nesimetrična* na skupu S ako nije ni simetrična ni asimetrična a to znači da postoje elementi $x, y \in S$ takvi da je xRy i yRx i da postoje drugi elementi $a, b \in S$ takvi da je aRb ali nije bRa. Na primer, relacija „brat od" na skupu svih ljudi je nesimetrična jer ako su x, y muškarci i x je brat od y onda je i y u relaciji sa x. S druge strane, ako je x muškarac a y žena i x je brat od y onda y nije u relaciji sa x jer je y sestra od x.

Za simetrične relacije dakle važi da ako je xRy možemo da tvrdimo da je yRx. Za asimetrične relacije važi da ako je xRy možemo da tvrdimo da nije yRx. Kod nesimetričnih relacija iz činjenice da je xRy ne sledi automatski ni da jeste yRx ni da nije yRx.

Zadatak

Neka je relacija R definisana na sledeći način na skupu $\{0, 1, 2, 3, 4\}$: xRy ako i samo ako je $y = x - 1$. Sastaviti tablicu ove relacije i ispitati koje osobine ima.

Rešenje

$_x{}^y$	0	1	2	3	4
0	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
1	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
2	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
3	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$

Relacija je *irefleksivna* jer ni jedan element skupa nije u relaciji sa samim sobom (dijagonala tabele). Relacija je *asimetrična* jer uvek važi da ako je xRy nije yRx, na primer $1R0$ ali nije $0R1$ (Ni jedno $\top$ nije simetrično u odnosu na dijagonalu). Relacija je *itranzitivna* jer iz xRy i yRz obavezno sledi da nije xRz, jer je uvek $z = x - 2$. Mogućnosti su: $(2, 1)$ i $(1, 0)$ ali nije $(2, 0)$, $(3, 2)$ i $(2, 1)$ ali nije $(3, 1)$ i $(4, 3)$ i $(3, 2)$ ali nije $(4, 2)$.

Zadatak

Neka je relacija R definisana na sledeći način na skupu $\{1, 2, 3, 4\}$: xRy ako i samo ako je $x + 2y$ neparan broj. Sastaviti tablicu ove relacije i ispitati koje osobine ima.

Rešenje

x^y	1	2	3	4
1	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
2	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
3	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
4	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

Relacija je *nerefleksivna* jer je, na primer, $1R1$ a nije $2R2$ (na dijagonali tabele je negde $\top$, a negde $\bot$. Relacija je *nesimetrična* jer je $3R1$ i $1R3$, a isto tako $1R2$ ali nije $2R1$ (Neke vrednosti su simetrične u odnosu na dijagonalu, a neke nisu). Relacija je *tranzitivna* jer iz xRy i yRz obavezno sledi da je xRz, jer da bi dva elementa bila u relaciji prvi obavezno mora da bude neparan. Mogućnosti su: $1R1$ i $1R1$, pa i $1R1$ (isto to za 3), zatim $1R3$ i $3R1$ i $1R1$ i slično $3R1$ i $1R3$ i $3R3$.

Zadatak

Neka je relacija R definisana na sledeći način na skupu celih brojeva Z: $x + y$ je neparno. Odrediti da li je relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Rešenje

a) *refleksivnost* — Relacija je irefleksivna jer $x + x = 2x$ nikada ne može biti neparan broj.

b) *simetričnost* — Relacija je simetrična jer ako je $x + y$ neparan broj onda je i $y + x$ neparan broj.

c) *tranzitivnost* — Relacija je itranzitivna jer ako je $x + y$ neparan broj i $y + z$ neparan broj onda je $x + z$ paran broj. Zašto? Zato što zbir dva cela broj može da bude neparan samo ako je jedan paran a drugi neparan. Dakle, postoji mogućnost da je x paran, onda mora da bude y neparan, a iz istog razloga onda je z paran. Zbir dva parna broja x i z je paran. Druga mogućnost je da je x neparan, tada mora da bude y paran, a z neparan. Zbir dva neparna broja x i z je paran.

2.4.5 Relacije ekvivalencije

Relacije ekvivalencije predstavljaju važnu klasu relacija. Za relaciju R kažemo da je *relacija ekvivalencije* ako ima osobine refleksivnosti, tranzitivnosti i simetričnosti.

Najpoznatiji primer relacije ekvivalencije je jednakost na skupu celih brojeva. Lako se može pokazati da ova relacija ima osobine refleksivnosti, tranzitivnosti i simetričnosti:

- za svako $x \in Z$ važi da je $x = x$;
- za svaki tri $x, y, z \in Z$ važi da ako je $x = y$ i $y = z$ onda je i $x = z$;
- za svaka dva $x, y \in Z$ važi da ako je $x = y$ onda je i $y = x$.

Dalji primeri relacije ekvivalencije bili bi „podudarnost“ na skupu svih trouglova, „iste težine“ na skupu svih fizičkih objekata, „stanovnik iste zemlje kao“ na skupu svih ljudi.

Kadgod imamo relaciju R na skupu S, skup S se može podeliti u određeni broj disjunktnih skupova koji se nazivaju *klase ekvivalencije* na takav način da su svi članovi jedne klase ekvivalencije u relaciji R jedan sa drugim ali ni jedan član jedne klase ekvivalenicije nije u relaciji R sa nekim članom druge klase ekvivalencije.

Da bi se odredile klase ekvivalencije skupa S pod relacijom R treba izabrati proizvoljan element a skupa S i utvrditi skup S_a svih onih elemenata iz S koji su u R sa a, uključujući naravno i a; zatim treba izabrati b iz S koji nije u S_a ($a \notin S_a$) i na sličan način odrediti skup S_b; zatim izabrati član koji nije ni u skupu S_a ni u skupu S_b i ovaj postupak ponavljati sve dok skup S ne bude iscrpljen. Na osnovu ovoga sledi da su sve klase ekvivalencije međusobom disjunktne ($S_i \neq S_j$, za $i \neq j$), dok je unija svih klasa ekvivalencije polazni skup ($S = S_a \cup S_b \cup S_c \ldots$).

Primer

Definišimo relaciju ekvivalencije „na istom kontinentu kao“ na skupu

$$\begin{aligned} S &= \{\text{Francuska, Čile, Nigerija, Ekvador, Luksemburg,} \\ &\quad \text{Egipat, Gana, San Marino, Urugvaj, Kenija,Madjarska}\} \end{aligned}$$

Ova relacija ekvivalencije particioniše skup S u sledeće tri klase ekvivalencije:

$$\begin{aligned} S_{ev} &= \{\text{Francuska, Luksemburg, San Marino, Madjarska}\} \\ S_{ja} &= \{\text{Čile, Ekvador, Urugvaj}\} \\ S_{af} &= \{\text{Nigerija, Egipat, Gana, Kenija}\} \end{aligned}$$

Primer

Na skupu svih suglasnika i sonanata srpskog jezika S može se definisati relacija ekvivalencije „imaju isto mesto tvorbe“. Ova relacija ekvivalencije particioniše skup ovaj u sledeće tri klase ekvivalencije:

$$\begin{aligned}
S_{us} &= \{\text{b, v, m, p, f}\} \\
S_{zu} &= \{\text{d, z, t, c, s}\} \\
S_{pn} &= \{\text{đ, ž, j, lj, nj, r, ć, č, dž, š}\} \\
S_{zn} &= \{\text{k, g, h}\} \\
S_{al} &= \{\text{n, l, r}\}
\end{aligned}$$

Zadatak:

Neka je $S = \{1, 2, 3, \ldots, 14, 15\}$ i neka aRb znači „$a \equiv b(\text{mod}3)$“.

a) Pokazati da je R relacija ekvivalencije na S.

b) Navesti klase ekvivalencije na koje relacija R particioniše skup S.

Napomena:

Ceo broj a je kongruentan (ili podudaran) sa celim brojem b po modulu n, piše se $a \equiv b(\text{mod}n)$, ako i samo ako je $(a - b)$ deljivo sa n (odnosno, n deli $a - b$ bez ostatka). Može se proveriti da je $a - b$ deljivo sa n ako a i b kada se podele sa n daju isti ostatak. Na primer, $25 \equiv 13(\text{mod}4)$ jer je $(25 - 13)/4 = 12/4 = 3$ (bez ostatka), odnosno $25/4 = 6$ (ostatak 1) i $13/4 = 3$ (ostatak 1).

Rešenje

a) *Refleksivnost*: Kako deljenje ma kog broja $a \in S$ sa 3 daje uvek isti ostatak iz toga sledi da je $a \equiv a(\text{mod}3)$, čime je refleksivnost relacije R dokazana.
Simetričnost: Ako je aRb, to znači da je $a \equiv b(\text{mod}3)$, odnosno da deljenje broja $b \in S$ sa 3 daje isti ostatak kao i deljenje broja $a \in S$ sa 3. Otuda sledi da je $b \equiv a(\text{mod}3)$, čime je simetričnost dokazana.
Tranzitivnost: Ako je aRb, to znači da a i b pri deljenju sa 3 daju isti ostatak. Ako je bRc, to znači da b i c pri deljenju sa 3 daju isti ostatak. Otuda sledi da i a i c pri deljenju sa 3 daju isti ostatak pa je dakle $a \equiv c(\text{mod}3)$, odnosno aRc, čime je i tranzitivnost dokazana.

b) Klase ekvivalencije na koje relacija R particioniše skup S su:

   $S_1 = \{1, 4, 7, 10, 13\}$ (svi elementi skupa S koji pri deljenju sa 3 daju ostatak 1),

   $S_2 = \{2, 5, 8, 11, 14\}$ (svi elementi skupa S koji pri deljenju sa 3 daju ostatak 2),

   $S_0 = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ (svi elementi skupa S koji pri deljenju sa 3 daju ostatak 0, odnosno koje broj 3 deli bez ostatka).

Zadatak
Na skupu $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ definisana je relacija: xRy ako i samo ako je $\mid x \mid = \mid y \mid$. Dokazati da je R relacija ekvivalencije i odrediti klase ekvivalencije.

Rešenje

a) *refleksivnost* — Relacija je refleksivna jer za svako $x \in A$ važi da je $\mid x \mid = \mid x \mid$.

b) *simetričnost* — Relacija je simetrična jer za svaka dva x i y iz A važi da ako je $\mid x \mid = \mid y \mid$ onda je i $\mid y \mid = \mid x \mid$.

c) *tranzitivnost* — Relacija je tranzitivna jer jer za svaka tri x, y i z iz A važi da ako je $\mid x \mid = \mid y \mid$ i $\mid y \mid = \mid z \mid$ onda je i $\mid x \mid = \mid z \mid$.

d) Klase ekvivalencije su: $\{-5, 5\}$, $\{-4, 4\}$, $\{-3, 3\}$, $\{-2, 2\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0\}$.

Zadaci za vežbu

1. Pokazati da li su sledeće binarne operacije na skupu celih brojeva asocijativne i komutativne?

   a) sabiranje;

   b) oduzimanje;

   c) sabiranje po modulu 5;

   d) apsolutna vrednost razlike;

   e) dizanje na kvadrat i sabiranje rezultata — operacija $\odot$. (Na primer $a \odot b = a^2 + b^2$, ili konkretno $3 \odot 5 = 9 + 25 = 36$.)

2. Odrediti i obrazložiti koje od sledećih osobina: refleksivnost, simetričnost, tranzitivnost, irefleksivnost, asimetričnost, ... imaju sledeće relacije definisane na skupu svih ljudi.

   a) otac od;

   b) brat od;

   c) potomak od;

3. Odrediti i obrazložiti koje od sledećih osobina: refleksivnost, simetričnost, tranzitivnost, irefleksivnost, asimetričnost, ... imaju sledeće relacije između celih brojeva.

   a) $x > y$;

   b) $x \geq y$;

   c) $x = y + 2$;

4. Na skupu svih celih brojeva specifikuj relaciju koja je:

   a) simetrična i irefleksivna;

   b) tranzitivna i asimetrična.

5. Neka je relacija R definisana na sledeći način na skupu $\{0, 1, 2, 3\}$: xRy ako i samo ako je $x + y \geq 3$. Sastaviti tablicu ove relacije i ispitati koje osobine ima.

6. Neka je relacija R definisana na sledeći način na skupu $\{1, 2, 3, 4\}$: xRy ako i samo ako je $x > y + 1$. Sastaviti tablicu ove relacije i ispitati koje osobine ima.

7. Neka je skup $S = \{$Bah, Bartok, Betoven, Bernštajn, Bize, Borodin, Brams, Britn$\}$. Formulisati dve različite relacije ekvivalencije na skupu S, koristeći bilo osobine imena bilo osobine ljudi, i navesti klase ekvivalencije koje one formiraju.

8. Na skupu svih suglasnika i sonanata srpskog jezika formuliši dve relacije ekvivalencije i navedi klase ekvivalencije koje one formiraju.

9. Neka je X partitivni skup skupa A. Neka je R_1 relacija na skupu X definisana sa „je podskup od“, a R_2 sa „je pravi podskup od“. Navesti i obrazložiti osobine ovih relacija.