1 Teorija skupova

1.1 Neki značajni skupovi

- Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Skup celih brojeva $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}|p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$, tj.
  $\mathbb{Q} = \{\displaystyle\frac{p}{q}|p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ (koristimo `\displaystyle`), tj.
  $\mathbb{Q} = \{\displaystyle\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ (koristimo `\displaystyle` i `\hspace{1mm}|\hspace{1mm}`)
- Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

1.2 Operacije sa skupovima

- Unija $A \cup B$
- Presek $A \cap B$
- Razlika $A \setminus B$
- Komplement A^c

1.3 Ješćemo korijenje

Uh, već je tri sata. Brzo mi dajte logaritamske tablice da izvadim koren, pa da se ruča. (R. Bojičić?)

$\sqrt[n]{12254} = ?$ $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt[3]{125} = 5$

1.4 Sume

Bez makroa:

- `$$\sum_{i=1}^{n}x_{i}=x_{1}+x_{2}+\ldots+x_{n}$$` proizvodi

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

- `$$\prod_{i=1}^{n}x_{i}=x_{1}\cdot{}x_{2}\cdot{}\ldots\cdot{}x_{n}$$` proizvodi

$$\prod_{i=1}^{n}x_{i}=x_{1}\cdot{}x_{2}\cdot{}\ldots\cdot{}x_{n}$$

Sa makroima:

- `$$\sum_{i=1}^{n}x_{i}=\nizsep{x}{n}{+}$$` proizvodi

$$\sum_{i=1}^{n}x_{i}=x_1+x_2+\ldots+x_n$$

- `$$\prod_{i=1}^{n}x_{i}=\nizsep{x}{n}{\cdot}$$` proizvodi

$$\prod_{i=1}^{n}x_{i}=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$$

`\displaystyle` pravi lepše sume i proizvode

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_{i}=x_1+x_2+\ldots+x_n$

$\displaystyle\prod_{i=1}^{n}x_{i}=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$

1.5 Apsolutna vrednost

$$|x|=\left\{\begin{array}{rl} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{array}\right.$$

1.6 Velike zagrade

Matrice

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{array}\right)$$

Determinante

$$A=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{array}\right|$$

1.7 Sume stepena

align:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2}$$

eqnarray:

$$1 + 2 + \ldots + n \quad = \quad \frac{n(n+1)}{2} \tag{3}$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \quad = \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{4}$$

2 Geometrija

2.1 Vektori

Vektori: $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$
Skalarni i vektorski proizvod: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$

Intenzitet (norma) vektora $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je broj $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

2.2 Trougao

Zbir uglova u trouglu: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, odnosno $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
Podudarnost: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

2.3 Trigonometrija

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan x \cot x = 1$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$$

3 Kombinatorika

Neka je A konačan skup. Broj elemenata skupa A označavaćemo sa $|A|$.

3.1 Dekartov proizvod

Konačan niz elemenata $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (tj. skup elemenata kod koga se tačno zna koji je element prvi, drugi,..., n-ti po redu) naziva se **(uređena) n-torka**. Specijalno, za $n = 2, 3, 4, \ldots$ u pitanju je uređeni par, odnosno uređena trojka, odnosno uređena četvorka itd.

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konačni skupovi. Dekartov proizvod skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (u oznaci $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ definiše se na sledeći način:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n | x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\}$$

U slučaju kada je $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, umesto oznake $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ koristimo oznaku

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ puta}}$$

Neka je Σ azbuka i $d \geq 0$. Ako se azbuka Σ sastoji od n slova, tada je broj niski nad azbukom Σ dužine d jednak n^d. Dakle, važi

$$|\Sigma^d| = |\Sigma|^d.$$

Skica dokaza:

- Postoji samo jedna prazna reč. Dakle,

$$|\Sigma^0| = |\{\varepsilon\}| = 1 = |\Sigma|^0;$$

- Svako slovo može da se poistoveti sa niskom dužine 1. Stoga niski dužine 1 ima onoliko koliko ima slova, tj.

$$|\Sigma^1| = |\Sigma| = |\Sigma|^1;$$

- Sve niske dužine $d+1$ mogu se dobiti tako što se na svaku nisku dužine d dopiše svako pojedinačno slovo. Stoga broj niski dužine $d+1$ predstavlja proizvod broja niski dužine d i broja slova azbuke. Dakle,

$$|\Sigma^{d+1}| = |\Sigma^d| \cdot |\Sigma|.$$

Odatle sledi (koristimo `$$`)

$$|\Sigma^2| = |\Sigma^1| \cdot |\Sigma| = |\Sigma| \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^2,$$
$$|\Sigma^3| = |\Sigma^2| \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^2 \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^3,$$
$$|\Sigma^4| = |\Sigma^3| \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^3 \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^4$$
$$\cdots$$

odnosno (koristimo `align`)

$$|\Sigma^2| = |\Sigma^1| \cdot |\Sigma| = |\Sigma| \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^2. \tag{5}$$
$$|\Sigma^2| = |\Sigma^2| \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^2 \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^3. \tag{6}$$
$$|\Sigma^2| = |\Sigma^3| \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^3 \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^4 \tag{7}$$
$$\cdots \tag{8}$$

Strog dokaz se izvodi korišćenjem principa matematičke indukcije.

Kodiranje je funkcija oblika $f : \mathcal{O} \longrightarrow \Sigma^+$

3.2 Kombinatorne konfiguracije

3.2.1 Varijacije sa ponavljanjem

Broj varijacija sa ponavljanjem k-te klase od n elemenata je $\bar{V}_k^n = n^k$.

3.2.2 Varijacije bez ponavljanja

Broj varijacija bez ponavljanja k-te klase od n elemenata je

$$V_k^n = \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ činilaca}}.$$

Specijalan slučaj varijacija bez ponavljanja predstavljaju permutacije bez ponavljanja.

3.2.3 Permutacije bez ponavljanja

$P^{(n)} = V_n^n = n(n-1)\cdots 1 = 1 \cdot 2 \cdots n$
Broj $n(n-1)\cdots 1 = 1 \cdot 2 \cdots n$ označavaćemo sa $n!$. Dakle, $P^{(n)} = n!$.

$0! \stackrel{def}{=} 1$

3.2.4 Kombinacije bez ponavljanja

Broj kombinacija bez ponavljanja k-te klase od n elemenata je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ činilaca}}}{\underbrace{k(k-1)\cdots 1}_{k \text{ činilaca}}}$$

4 Iskazni račun

4.1 Operacije sa iskazima

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

	$\neg$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Sadržaj